

Mehanika fluida

Skripta s odabranim poglavljima - Studij: KI

FKIT

Izv. prof. dr. sc. Jasna Prlić Kardum

SADRŽAJ

STATIKA FLUIDA.....	1
DINAMIKA FLUIDA.....	22
ISTJECANJE.....	35
TRANSPORT KAPLJEVINE.....	49
PROTJECANJE KROZ SLOŽENI CJEVOVOD.....	64
DINAMIKA STLAČIVIH FLUIDA	68

STATIKA FLUIDA

ŠTO JE MEHANIKA FLUIDA

Mehanika fluida je dio fizike koji se bavi gibanjem fluida i silama koje djeluju na fluid. Mehanika fluida dijeli se na statiku fluida koja proučava zakone fluida u mirovanju te se bavi problemima povezanim sa fluidom u mirovanju. Kinematika fluida se bavi zakonima gibanja fluida te dinamiku fluida se bavi silama koje djeluju na fluid i gibanjima koje nastaju djelovanjem tih sila te interakcija između čvrstih tijela i fluida.

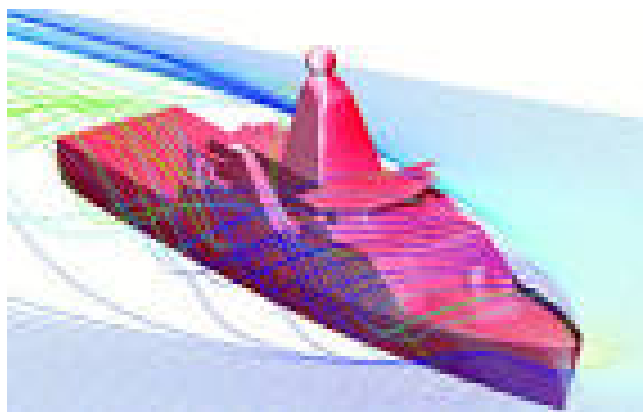
Kinematika fluida opisuje gibanje fluida u vremenu i prostoru, ne razmatra uzroke gibanja i sile koje djeluju u fluidima koji se gibaju, klasificira strujanje i razvija fizikalne metode za opis sustava. Primjena kinematike fluida nalazi se u dinamici fluida. U dinamici fluida se uz pomoć metoda dobivenih u kinematici fluida razrađuju zakoni održanja za fluide u strujanju tj. osnovni zakoni dinamike fluida (zakon očuvanja mase, zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja energije).

SILE U FLUIDU

Bez obzira da li fluid mirovao ili se gibao na ili u masi fluida djeluju razne sile:

- gravitacijske
- tlačne
- smične
- inercijske...

Sile koje djeluju u fluidu mogu biti u ravnoteži tada fluid miruje. Sa stajališta korisnosti možemo govoriti o korisnim silama (npr. uzgon) ili parazitskim(sile otpora). Određivanje i definiranje tih sila zadatak je mehanike fluida.



Slika 1. Primjer djelovanja fluida kao medija i radnog fluida

Fluid možemo definirati: na osnovu njegovog ponašanja kada na njega djeluju sile koje mogu deformirati tijelo različite načine:

- ✓ istežanje
- ✓ komprimiranje
- ✓ uvijanje

Pod djelovanjem sile čvrsta tijela se neznajno deformiraju, a nakon prestanka djelovanja sile vraćaju se u prvobitan oblik. Za razliku od čvrstih tijela fluidi se lako deformiraju i ne vraćaju se u prvobitan oblik ili poziciju. Pod utjecajem sile fluidi mogu teći. Zbog razlike u kvaliteti čvrste tvari i fluida različita je i uloga u njihovoj tehničkoj primjeni. Naime, fluidi se ne mogu opteretiti iole većim silama (smičnim ili vlačnim) i zato se ne upotrebljavaju kao materijal za gradnju strojeva, ali se često koriste kao medij (ova riječ se često koristi za fluid).

Sve se sile koje mogu djelovati u fluidu možemo podijeliti u dvije grupe:

masene ili volumenske sile (vanjske)

- ✓ gravitacijska
- ✓ centrifugalna
- ✓ inercijska
- ✓ elektromagnetska

Masene ili volumenske – rezultat su mase na koju djeluju i od koje potječu, raspoređene su po prostoru i djeluju na svaki element fluida, javljaju se bez fizičkog dodira. Djeluju unutar volumena na svaki dio njegove mase. Rezultat su položaja mase u polju sila (integracija po volumenu) Relativno se jednostavno određuju.

Npr. vanjska sila: $d\vec{F}_m = \vec{a} \cdot \rho \cdot dV$, integriranjem po volumenu - $\vec{F}_m = \int_V \vec{a} \cdot \rho \cdot dV$

površinske sile (unutarnje)

- ✓ tlačna sila
- ✓ sila trenja
- ✓ sila napetosti površine

Površinske ili unutarnje su rezultat kontakta između pojedinih materijalnih čestica međusobno te djelovanja čestica i podloge (stjenke) dobivaju se integracijom po površine.

Posljedice su dodira između samih čestica fluida ili između čestica fluida i stjenke čvrstog tijela (npr. posuda, cijev, avion)

Najčešće se ne mogu egzaktno odrediti.

Zbog toga: problemi mehanike fluida su najčešće vezani uz određivanje rasporeda površinskih sila, te njihovih kvantitativnih vrijednosti.

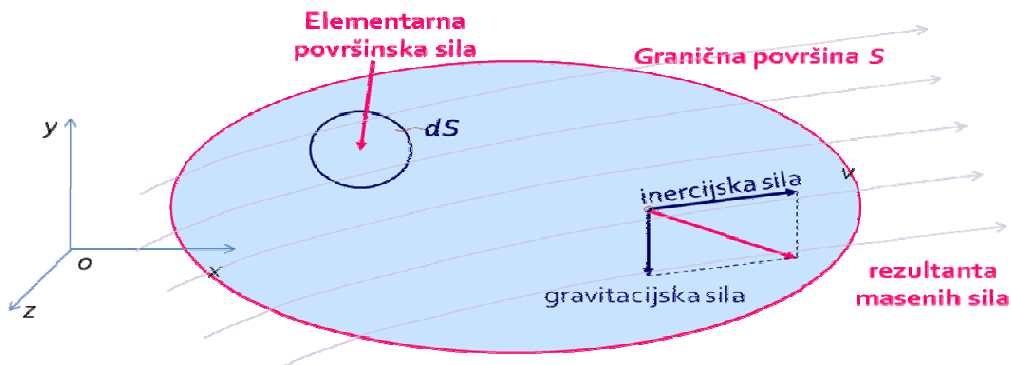
PROBLEM!

Potrebno je utvrditi kolika mora biti vanjska sila da bi se savladale unutrašnje sile.

DINAMIČKA ANALIZA STRUJANJA FLUIDA

U dinamičkoj analizi strujanja fluida (u polju masene sile) promatra se gibanje zamišljenog elementarnog (individualnog) volumena fluida koji se sastoji od istih čestica, giba u prostoru i mijenja se s vremenom, a odijeljen je od ostatka fluida površinom S .

Njegovu masu definiramo: $\int_{V(t)} \rho \cdot dV = m = konst.$



Slika 2. Prikaz gibanja individualnog volumena fluida i djelovanja sila unutar njega

Na volumen možemo primijeniti jednadžbu održanja količine gibanja prilagođenu karakteru fluida i vrsti sila koje na njega djeluju.

Rezultanta masenih sila koje djeluju na svaku česticu fluida je: $\vec{F}_m = \int_{V(t)} \vec{a} \cdot \rho \cdot dV$

Rezultanta vanjskih površinskih sila plošnim integralom preko granične površine: $\vec{F}_m = \int_{S(t)} \vec{\sigma} \cdot dS$

σ - specifična površinska sila kojom čestice fluida izvan elementarnog volumena djeluju svojim dodirrom preko elementa dS na promatrani elementarni djelić fluida

S -granična ploha može biti i stjenka posude

Integriranjem diferencijalnih sila dobiva se rezultanta svih sila koje djeluju na cijelu masu fluida:

Jed. kol. gibanja individualnog volumena: $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \vec{v} \cdot \rho \cdot dV = \int_{V(t)} \vec{a} \cdot \rho \cdot dV + \int_{S(t)} \vec{\sigma} \cdot dS$

Ovo je osnovna dinamička jednadžba u mehanici fluida gdje je desna strana prilagođena dinamičkoj analizi fluida u strujanju, a sastoji se od zbroja vanjskih i površinskih sila.

STATIKA FLUIDA

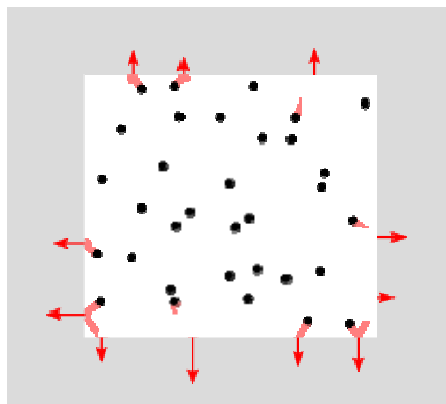
Statika fluida ili hidrostatika opisuje fluide u mirovanju, razmatra zakone ravnoteže i tlaka fluida u stanju mirovanja te raspodjelu tlaka u tekućini koja miruje u odnosu na stjenke posude u kojoj se nalazi. Fluid se smatra statičnim ukoliko sve čestice miruju ili imaju konstantnu relativnu brzinu prema relativno inertnoj površini.

U statičkom fluidu nema tangencijalnih naprezanja niti gibanja čestica fluida (jer nema inercijskih sila koje bi uzrokovale gibanje) stoga se smatra najegzaktnijim dijelom mehanike fluida. To pojednostavljuje matematičko opisivanje i analizu pojava. Pa je statika najegzaktniji dio mehanike fluida. Zakoni statike fluida vrijede jednako za: newtonovske i nenevtonske fluide.

Zadatak i praktična primjena statike fluida je odrediti raspored normalnih tlačnih naprezanja unutar fluida. Praktična primjena statike fluida je proračun sila koje djeluju na elemente konstrukcija okruženih fluidom u stanju mirovanja

TLAK

Pored gravitacijske sile, osnovna sila u stanju mirovanja je tlačna sila koja djeluje: u cijeloj masi fluida (jedna na drugu) te na površinu/stjenku posude u kojoj se nalazi fluid.



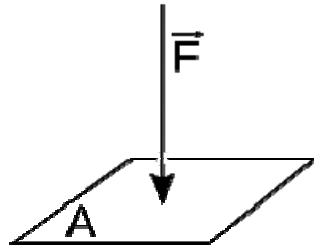
Slika 3. Djelovanje čestica fluida na stjenke posude i međusobno

U fluidima u mirovanju sile su uvijek okomite na površinu s kojom je fluid u kontaktu. Sile koje djeluju okomito na površinu zovemo silama tlaka.

Tlak se definira kao omjer sile i površine na koju ta sila djeluje okomito. U svakoj točki mirnog fluida tlak je isti u svim smjerovima. Granična vrijednost omjera površinske sile i površine presjeka, predstavlja tlak u nekoj točk

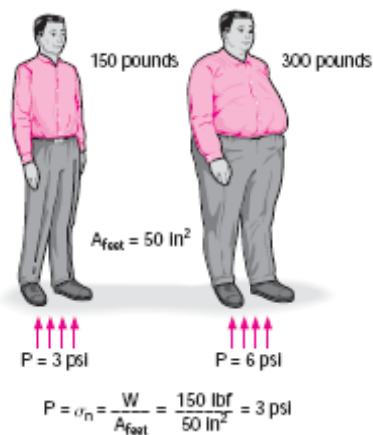
$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

Ako je normalna sila jednoliko raspoređena po cijeloj površini, tada tlak iznosi: $p = \frac{F}{A}$



Slika 4. Fizikalni smisao tlaka – djelovanje sile po površini

Fluidi lako mijenjaju oblik i poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze. Međutim, da bismo im promijenili volumen, potrebno je djelovati silom. Pri tom je plinove lako stlačiti. Stlačivost kapljevinaje vrlo mala i potrebne su velike sile da bi se opazila promjena volumena, pa kapljevine smatramo nestlačivim.



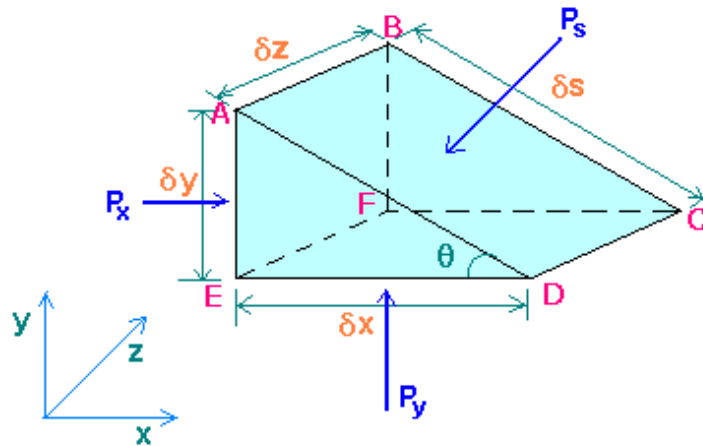
Slika 5. Kod čvrstih tijela sila po površini je težina.

Na slici je prikazan odnos apsolutnih i manometarskih tlakova i veličina te dogovorom prihvaćenoga standarda atmosferskog tlaka

TLAK U TOČKI FLUIDA

Tlak ima veličinu ali nema određeni smjer što znači da je skalarna veličina. Tlak u bilo kojoj točki fluida isti je u svim smjerovima. Demonstrirajmo to promatrajući mali dio fluida klinastog oblika, tj. oblika pravokutnog trokuta, u ravnoteži:

Slika 6.



Slika 6. Djelovanje sila na djelić fluida klinastog oblika

p_x djeluje pod pravim kutom na površinu ABEF

p_y djeluje pod pravim kutom na površinu CDEF

p_s djeluje pod pravim kutom na površinu ABCD

Sile u smjeru osi x:

zbog djelovanja tlaka p_x u smjeru osi x, djeluje sila tlaka na površinu definiranu umnoškom $\delta y \cdot \delta z$:

$$p_x \cdot \delta y \cdot \delta z$$

horizontalna komponenta sile zbog tlaka p_s

$$-(p_s \cdot \delta s \cdot \delta z) \sin \theta = -p_s \cdot \delta s \cdot \delta z \cdot \frac{\delta y}{\delta s} = -p_s \cdot \delta y \cdot \delta z$$

Kako p_y nema komponente u smjeru osi x, prethodne dvije sile bit će u ravnoteži, vrijedi zakon očuvanja količine gibanja (II Newtonov zakon)

$$p_x \cdot \delta y \cdot \delta z + (-p_s \cdot \delta y \cdot \delta z) = 0$$

odnosno: $p_x = p_s$

Slično vrijedi i za os y:

Sila zbog djelovanja tlaka p_y na površinu definiranu umnoškom $\delta x \cdot \delta z$: $p_y \cdot \delta x \cdot \delta z$

Vertikalna komponenta sile zbog tlaka p_s

$$-(p_s \cdot \delta s \cdot \delta z) \cos \theta = -p_s \cdot \delta s \cdot \delta z \cdot \frac{\delta x}{\delta s} = -p_s \cdot \delta x \cdot \delta z$$

Zbog djelovanja sile teže koja djeluje na element fluida uzima se u obzir:

$$-m \cdot g = -\rho \cdot V \cdot g = -\rho \cdot (\delta x \delta y \delta z / 2) \cdot g$$

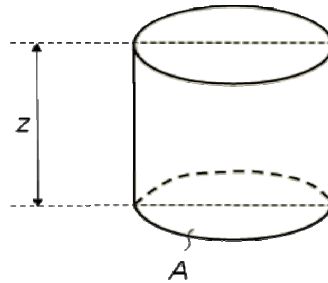
Budući da su dx , dy i dz male veličine, vrijednost njihovog umnoška je zanemariva u odnosu na djelovanje ostalih sila te vrijedi: $p_y = p_s$

dakle: $p_x = p_y = p_s$

Ukoliko fluid miruje hidrostatski tlak je u svim smjerovima jednak.

HIDROSTATSKI PARADOKS

Na fluid u mirovanju, osim sile tlaka djeluje i sila teža. Kako je već spomenuto, to je volumna sila koja djeluje na sve čestice fluida. Tlak uzrokovan težinom samog fluida nazivamo hidrostatskim tlakom. Na primjer, tlak na dno posude napunjene vodom uzrokuje težina stupca vode iznad dna. Promatrajmo fluid u cilindričnoj posudi.



Slika 7. Fluid u cilindričnoj posudi

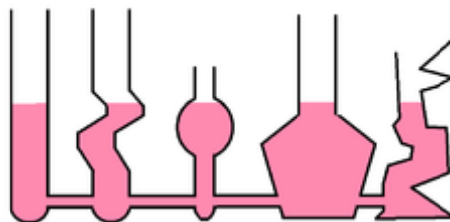
Volumen fluida unutar posude je: $V = A \cdot z$

Sila gravitacije koja djeluje na dno posude: $F = m \cdot g = A \cdot z \cdot \rho \cdot g$

$F = F_p$ – tlačna sila koja djeluje na dno posude jednaka je težini fluida.

Tlak je jednak djelovanju sile po površini: $p = \frac{F_p}{A} = \frac{A \cdot z \cdot \rho \cdot g}{A} = \rho \cdot g \cdot z$

Što predstavlja OSNOVNU JEDNADŽBU HIDROSTATIKE ili HIDROSTATSKI PARADOKS: tlak koji djeluje na dno posude ovisi samo o visini (z), a ne i o volumenu fluida.



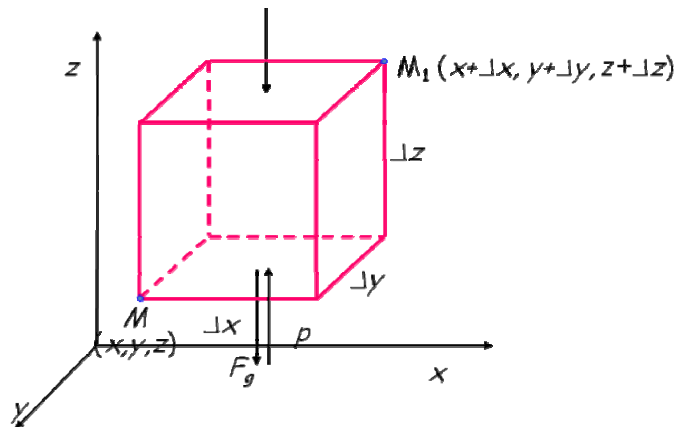
Slika 8. Hidrostatski paradoks u spojenim posudama

Na slici se vidi da kapljevina uvijek ima jednaku visinu bez obzira na oblik posude dakle, hidrostatski tlak jednak je u svim točkama fluida na istoj dubini bez obzira na oblik posude.

Ako homogena kapljevina miruje u više međusobno spojenih posuda, tada će slobodne površine otvorene prema istom atmosferskom tlaku ležati na istoj izobari ($\Delta h=0$).

PROMJENA HIDROSTATSKOG TLAKA S PROMJENOM VISINE

Kod fluida u mirovanju, hidrostatski tlak u horizontalnom smjeru, tj. u točki se ne mijenja što nije slučaj u vertikalnom smjeru. Budući da na fluid u mirovanju djeluje i vlastita težina doći će do promjene tlaka u vertikalnom smjeru. Tlak u fluidu povećava se s dubinom zbog toga što više fluida leži na njegovim dubljim slojevima i utjecaj te dodatne težine uravnotežuje se povećanjem tlaka. Promjene zakona hidrostatskog tlaka s dubinom možemo dokazati promatrajući elementarni djelić fluida s bridovima Δx , Δy , Δz .



Slika 9.

Ako je hidrostatski tlak u nekoj točki M prikazan funkcijom: $p=f(x,y,z)$

a u točki M_1 : $p=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$

Promatrajući dvije točke različitog položaja može se uočiti da se hidrostatski tlak se promijenio za dp :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz$$

Ukupna promjena tlaka prikazana je zbrojem parcijalnih derivacija koje predstavljaju promjene hidrostatskog tlaka u smjeru osi x , y ili z .

Bilanca sila koju djeluju u smjeru osi z (tlačne na horizontalne površine te sila gravitacije):

$$p \cdot dx \cdot dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx \cdot dy - \rho \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \cdot g = 0$$

U smjeru osi x i y nema sile gravitacije pa je promjena tlaka u smjeru osi x i osi y :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Uvrštenjem u Eulerovu jednadžbu dobiva se zakonitost promjene hidrostatskog tlaka s visinom

(dubinom):
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g$$

Integriranjem:
$$p(z) = p_0(z) - \int_{z_0}^z \rho \cdot g \cdot dz \cdot$$

Gdje

$\int_{z_0}^z \rho \cdot g \cdot dz$ predstavlja težinu stupca fluida visine $(z-z_0)$ po jediničnoj površini

$p_0(z)$ - tlak koji vlada na površini tekućine

Dobiva se jednadžba:
$$p(z) = p_0 - \rho \cdot g \cdot (z - z_0)$$

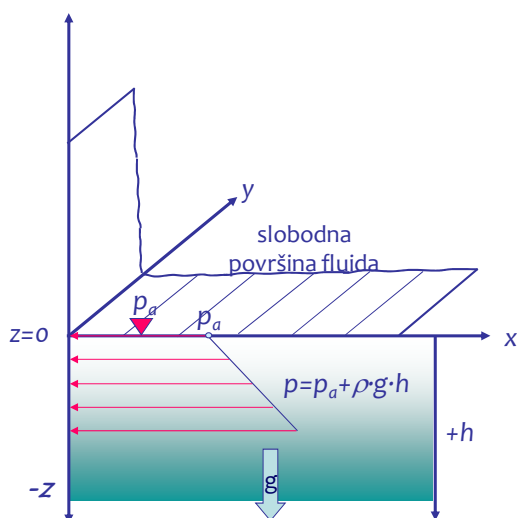
supstitucijom: $h = -z$ dobiva se izraz promjene tlaka s dubinom $p(h) = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$

gdje h predstavlja dubinu, a z - visinu.

Vidljivo je da hidrostatski tlak raste s dubinom.

Linearna promjena hidrostatskog tlaka u homogenoj nestlačivoj tekućini

Na slici je prikazana promjena ukupnog hidrostatskog tlaka u ovisnosti od dubine u otvorenoj posudi s kapljevinom. Vidljivo je da ukupni tlak p linearno raste (kosi pravac) s povećanjem dubine h i najveću vrijednost ima na dnu posude.



izobare su ravnine okomite na smjer sile teže

Slika 10. Mirujući fluid u polju sile teže

Uobičajeno je definirati nulti položaj na horizontalnoj slobodnoj površini gdje vlada konstantni tlak p_0 . Odnosno za otvorene spremnike i bazene, atmosferski tlak p_a . Ako se za proizvoljnu početnu visinu z_0 na kojoj vlada tlak p_0 , stavi $z_0=0$, dobiva se zakon promjene hidrostatičkog tlaka u nestlačivom fluidu:

$$p(z) = p_0 - \rho \cdot g \cdot z$$

Supstitucijom $h=-z$, gdje je h dubina mjerena od $z=0$, na određenoj dubini fluida vlada tlak:

$$p(h) = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

Može se reći da tlak pada linearno s visinom i linearno raste s dubinom. Ova jednadžba je osnova hidrostatičkih proračuna u tehničkoj primjeni.

Linearni zakon o promjeni hidrostatskog tlaka, može se prikazati i u slijedećem obliku:

$$\frac{p}{\rho \cdot g} + z = C.$$

U ovom izrazu svi članovi predstavljaju visine:

$$\frac{p}{\rho \cdot g} \text{ je visina stupca tekućine na čijem gornjem kraju vlada nulti tlak, a u osnovici tlak } p,$$

z je geodetska ili geometrijska visina,

$$C = \frac{p_0}{\rho \cdot g} \text{ je konstantna visina tlaka } p_0 \text{ na nultoj visini.}$$

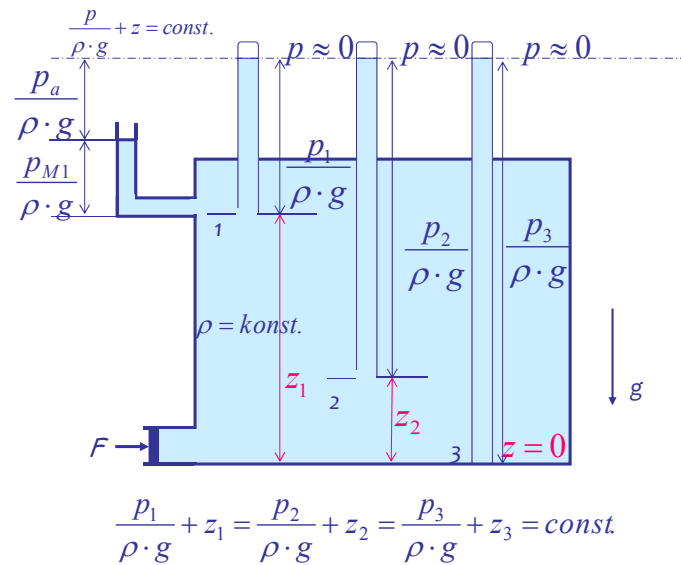
Zbroj visine tlaka i geometrijske visine se naziva piezometrijska visina.

Osnovni zakon hidrostatičke se može izraziti:

U nestlačivom fluidu u mirovanju piezometrijska visina je konstantna u svim točkama.

Ovaj zakon može se objasniti slijedećom slikom gdje je u zatvorenom spremniku djelovanjem sile F na stap nametnut tlak nestlačivom fluidu gustoće ρ . U različitim točkama, proizvoljno odabranim unutar spremnika mjereni su tlakovi visinom stupca istog fluida u piezometrima. Piezometri su staklene cijevi kojima je donji otvoreni kraj uronjen u tekućinu, a u gornjem zatvorenom vlada vakuum. Dakle, tlak iznad tekućine u piezometru je 0.

Kako je visinski položaj u piezometrima konstantan u svim proizvoljno odabranim točkama, potvrđen je zakon rasporeda piezometričkog tlaka u nestlačivom fluidu.



Slika 11. Hidrostatski tlak u nestlačivoj homogenoj tekućini

Ista slika može pojasniti Pascalov zakon. Za tlakove unutar spremnika zbog djelovanja sile F na stap vrijedi:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 = \frac{p_0}{\rho \cdot g} = const$$

Ako se poveća djelovanje sile za ΔF , povećat će se tlak u svim točkama, a visina u piezometrima povećati će se za visinu stupca:

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot g}$$

Dakle, dođe li do bilo kakve promjene u proizvoljnim točki, mora se u svim drugim proizvoljnim točkama tlak promijeniti za isti iznos da bi ravnoteža ostala sačuvana. U suprotnom bi došlo do tečenja.

U proizvoljnim točkama: 1, 2 i 3, prirast tlaka će iznositi: Δp_1 , Δp_2 i Δp_3 .

$$\frac{p_1 + \Delta p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{p_2 + \Delta p_2}{\rho \cdot g} + z_2 = \frac{p_3 + \Delta p_3}{\rho \cdot g} + z_3.$$

Jednadžba hidrostike mora biti zadovoljena, što znači da će prirast tlaka zbog dodatno nametnute sile izvana biti jednak bez obzira na mjerno mjesto u fluidu.

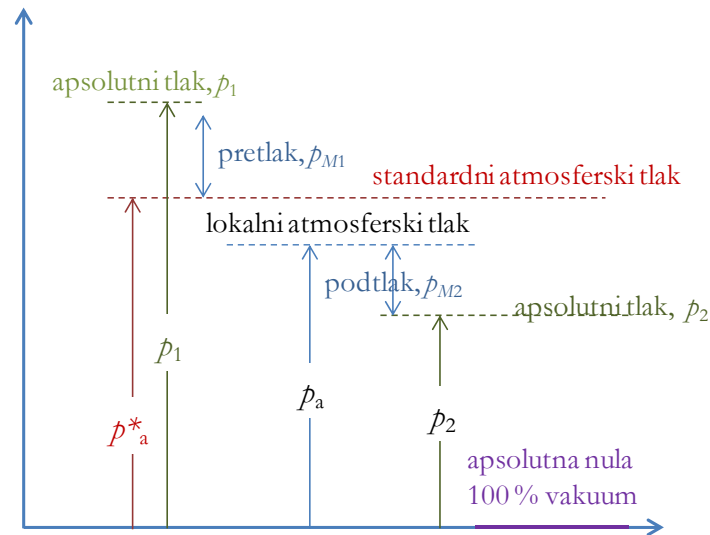
$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3$$

Vrijedi: PASCALOV ZAKON – tlak nametnut izvana širi se jednoliko u svim smjerovima.

MJERENJE TLAKA

Zemlja svojom privlačnom silom drži oko sebe zračni omotač, Zemljinu atmosferu. Atmosferski tlak nastaje zbog vlastite težine zračnog stupca iznad Zemljine površine.

Stvarni tlak za zadani položaj u odnosu na apsolutnu nulu, tj. potpunog vakuuma, naziva se apsolutni tlak p . Mjerenjem tlaka dobiva se razlika tlaka Δp između izmjerene veličine i atmosferskog tlaka p_0 , odnosno relativni tlak.



Slika 12. Odnos apsolutnih i manometarskih tlakova

S obzirom na polaznu veličinu tlaka prilikom mjerenja postoji:

- standardni atmosferski tlak koji odgovara visini živina stupca od 760 mm pri temperaturi 0 °C, gustoći žive 15 999,1 kg m⁻³,
- vakuum ili apsolutna 0 je prazan prostor, a koristi se i kao pojam za vrlo mali tlak sveden na neku minimalnu ostvarljivu vrijednost,
- apsolutni tlak - tlak mjeren s obzirom na vakuum,
- atmosferski tlak nastaje stoga što zračni omotač Zemlje djeluje svojom težinom na njenu površinu,
- lokalni atmosferski tlak koji se stalno i nepravilno mijenja jer ovisi o trenutnoj težini zraka i podložan je mnogim utjecajima te se razlikuje od standardnog atmosferskog tlaka
- relativni tlak - tlak mjeren s obzirom na atmosferski tlak.
- podtlak –mjereni tlak koji je manji od atmosferskog,
- predtlak – mjereni tlak koji je veći od atmosferskog,

HIDROSTATSKI MANOMETRI

Manometri su instrumenti koji služe za mjerenje manometarskog tlaka, odnosno razlike između apsolutnog, p_A i atmosferskog tlaka, p_a pomoću razlike stupca fluida. Zakon promjene hidrostatskog tlaka osnova je rada hidrostatskih manometara. Manometarski tlak se mjeri tako da se jedan kraj priključi na mjerno mjesto u fluidu, a drugi je otvoren prema atmosferi.

$$p_M = p_A - p_a = \rho \cdot g \cdot h$$

Ukoliko je tlak na mjernom mjestu veći od atmosferskog, manometarski tlak je veći od 0, na mjernom mjestu vlada pretlak

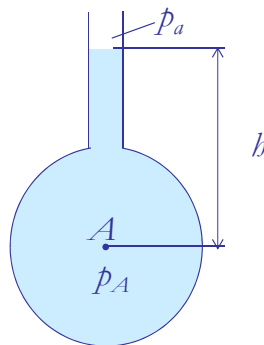
$$p_M > 0 \text{ – pretlak,}$$

a ako je manometarski tlak manji od nule, na mjernom mjestu vlada podtlak

$$p_M < 0 \text{ – podtlak.}$$

Piezometar

Najjednostavnija izvedba hidrostatskog manometra je piezometar. Izvedena je kao vertikalna staklena cijev (promjera većeg od 1 cm) koja je na jednom kraju otvorena, a na drugom spojena s fluidom u posudi. Fluid u posudi se podiže do uspostavljanja ravnoteže, a mjerilo za tlak je vertikalna udaljenost od meniskusa do točke u kojoj se mjeri tlak, odnosno od osi spremnika ili cijevi. Prikladan je za mjerenje manjih vrijednosti pretlaka.



Slika 13. Piezometar

$$p_A = p_a + \rho \cdot g \cdot h$$

$$p_M = p_A - p_a = \rho \cdot g \cdot h$$

Mjerenjem visine stupca tekućine koja se podiže u cijevi, do uspostavljanja ravnoteže, može se odrediti manometarski, a zatim ovisno o atmosferskom tlaku i tlak u točki A. Visina stupca je vertikalna udaljenost od meniskusa do točke u kojoj se određuje tlak. Ovakvi instrumenti nisu praktični za mjerenje visokih vrijednosti pretlaka, npr. pretlak od $1 \cdot 10^5$ Pa za vodu zahtjeva cijev

visine 10 m. Prikladni su za mjerenje nižeg pretlaka, a u slučaju podtlaka, ne mogu se koristiti jer bi došlo do ulaska zraka u spremnik.

Na slici 3. koja prikazuje spremnik s nestlačivom, homogenom tekućinom na lijevoj strani spremnika priključen je piezometar na visini točke 1, drugi njegov kraj otvoren je prema atmosferi. Svojim otklonom (visinom stupca) piezometar mjeri manometarski tlak u točki 1:

$$p_M = p_1 - p_a$$

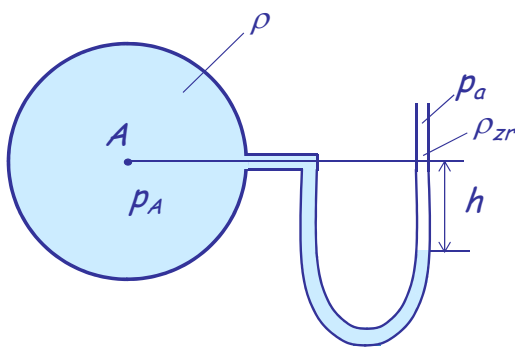
Tada je to pretlak $p_M > 0$ ili izraženo visinom $h = \frac{p_1}{\rho \cdot g} - \frac{p_a}{\rho \cdot g} > 0$.

U-manometar

U manometar je cijev savijena je u obliku slova U i varijacija je piezometra. Ovaj manometar mjeri relativni tlak $\Delta p = p_2 - p_1$, dakle razliku tlakova i zato se zove diferencijalni manometar.

Sila na mjestu 2 se uslijed tlaka p_2 prenosi se kroz manometarsku tekućinu (najčešće se radi o živi zbog velike gustoće) u desni krak gdje drži ravnotežu sa silom na mjestu 1 uslijed tlaka p_1 i težinom stupca manometarske tekućine visine h .

Najčešće je kod ovakvog manometara jedan krak otvoren prema atmosferi pa u tom slučaju U-manometar služi za mjerenje relativnog pretlaka ili podtlaka. U-manometr uvijek mjeri razliku tlakova na mjestu 1 i 2.

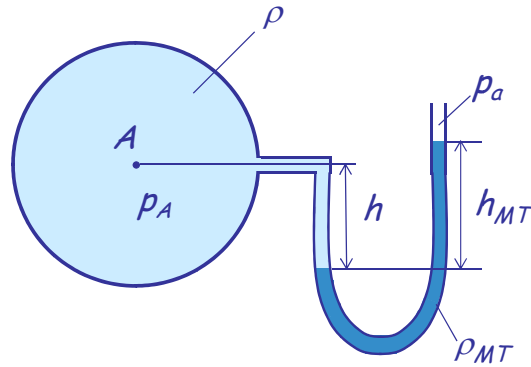


$$p_A + \rho \cdot g \cdot h = p_a$$

$$p_M = p_A - p_a = -\rho \cdot g \cdot h$$

Slika 14. Mjerenje podtlaka U manometrom

Ukoliko se u manometar ulije tekućina veće gustoće (najčešće živa) tada se U – manometar može koristiti i za mjerenje većih vrijednosti podtlaka i pretlaka.



Slika 15. Spremnik s ugrađenim U manometrom

$\rho_{MT} > \rho$ u posudi vlada pretlak

$$p_A + \rho \cdot g \cdot h = p_a + \rho_{MT} \cdot g \cdot h_{MT}$$

$$p_M = p_A - p_a = \rho_{MT} \cdot g \cdot h_{MT} - \rho \cdot g \cdot h$$

Ako je u posudi plin tada je razlika gustoća fluida čiji se tlak mjeri i manometarske tekućine velika

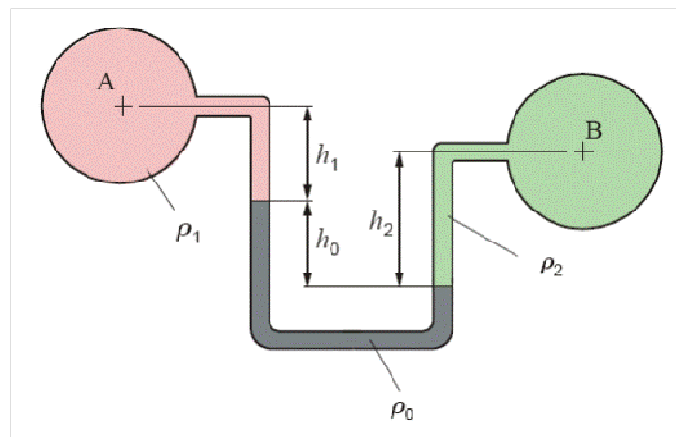
$\rho_{MT} \gg \rho$ te se manometarski tlak izražava:

$$p_M = p_A - p_a = \rho_{MT} \cdot g \cdot h_{MT}.$$

Postavljanje jednadžbe manometra

Postupak za postavljanje jednadžbe manometra (jednadžbe promjene tlaka između dviju točaka koje se mogu međusobno spojiti kroz mirujući fluid)

Polazi se s tlakom u točki A te mu se dodaju sve promjene tlaka (ovisno o visini stupca) idući od meniskusa do meniskusa i to s pozitivnim predznakom ako se ide prema dolje, odnosno s negativnim ako se ide prema gore. U točki B vlada određeni tlak s kojim se dobivena jednadžba izjednači.



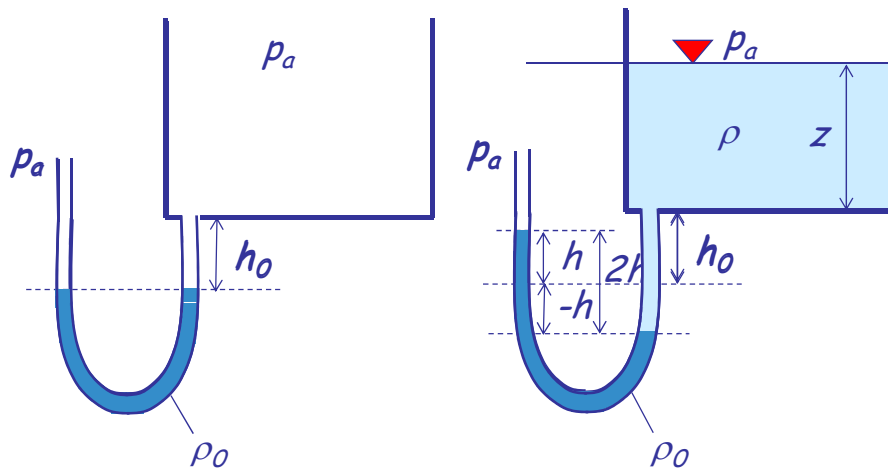
Slika 16. Diferencijalni hidrostatski manometar.

$$p_A + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_0 \cdot g \cdot h_0 - \rho_2 \cdot g \cdot h_2 = p_B$$

Mjerenje razine kapljevine u spremniku

Odrediti nivo kapljevine u spremniku moguće je postavljanjem U manometra na dno ili okomito na stjenku spremnika.

Na slici je prikazan prazan otvoren spremnik s ugrađenim U-manometrom na dnu spremnika. U ovom slučaju, manometarska tekućina nema otklon, odnosno u ravnoteži je, jer je drugi krak u manometra otvoren prema atmosferi.



Slika 17. a) Prazan spremnik i b) spremnik ispunjen kapljevinom

Punjenjem spremnika, dolazi do pomaka manometarske kapljevine, ovisno o visini stupca u spremniku, slika 8b. U desnom kraku manometarska kapljevinu spušta se za visinu h , odnosno u lijevom kraku podiže za istu vrijednost.

Može se uspostaviti bilanca tlakova za lijevi i desni krak:

$$p_a + 2 \cdot h \cdot \rho_0 \cdot g = p_a + z \cdot \rho \cdot g + h_0 \cdot \rho \cdot g + h \cdot \rho \cdot g$$

Kako je i lijeva strana kraka manometra otvorena prema atmosferi (kao i spremnik), atmosferski tlakovi se mogu kratiti. U slučaju zatvorenog spremnika, iznad kapljevine ne bi vlado atmosferski tlak.

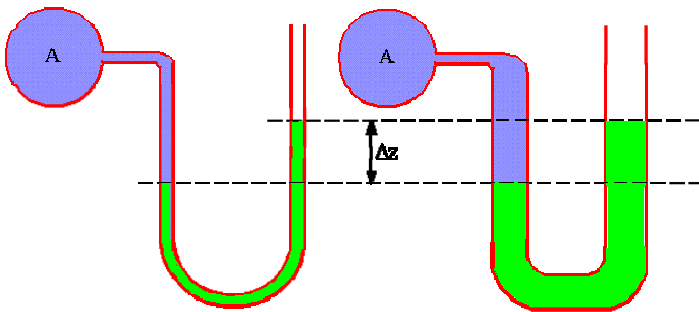
Poznavanjem visina h i h_0 te gustoće kapljevine i u spremniku i u manometru, može se odrediti visina kapljevine u spremniku.

$$z = \frac{h \cdot (2 \cdot \rho_{MT} - \rho) - h_0 \cdot \rho}{\rho}$$

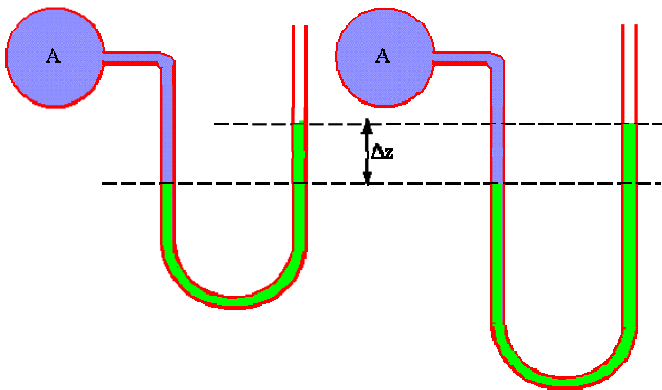
Diferencijalni manometri

Diferencijalni manometri posebno su pogodni za mjerenje razlike tlaka između dviju određenih točaka. Obično se koriste za mjerenje pada tlaka fluida pri protjecanju zbog Mjerenje pada tlaka u cjevovodu postiže se postavljanjem krakova U-cijevi između dvije određene točke. Razlika tlaka se pokazuje visini stupca h , manometarskog fluida između dva vertikalna koljena. Radni fluid može biti plin ili kapljevina čija je gustoća ρ . Manometarska cjevčica ispunjena je težim fluidom, vrlo često živom koja je pogodna za mjerenje Δp zbog velike gustoće.

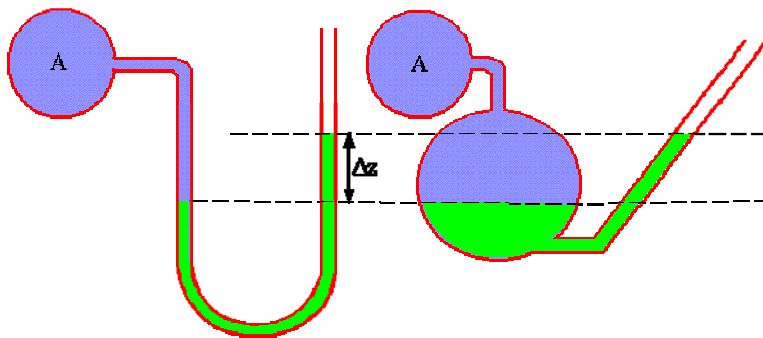
Pravila pri mjerenju tlaka s U-manometrom



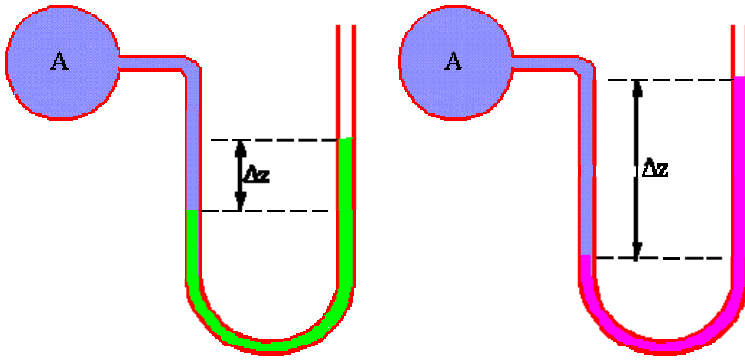
Slika 18. Razlika manometarske visine ne ovisi o promjeru cijevi.



Slika 19. Razlika manometarske visine ne ovisi o duljini cijevi.



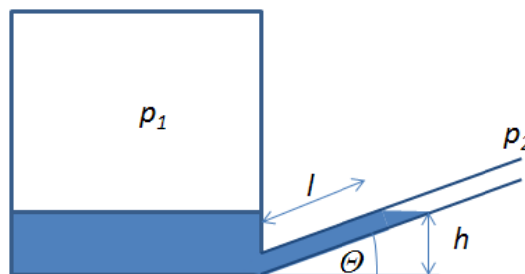
Slika 20. Razlika manometarske visine ne ovisi o obliku cijevi.



Slika 21. Razlika manometarske visine ovisi o korištenoj manometarskoj tekućini.

Kosi manometar

Što je manja vrijednost odnosa razlike tlakova i očitavanja skale manometra $\Delta p/h_M$, tj. što je što je dulji mjerni stupac fluida za što manju razliku tlakova to je manometar osjetljiviji. Povećanje osjetljivosti ostvaruje se na različite načine. Jedan od njih je mikromanometar s priklonjenom cijevi ili kosi manometar. Kosi manometar ima veliku osjetljivost i služi za mjerenje vrlo malih tlakova. Cijev manometra priklonjena je pod određenim kutom prema horizontali. Ukoliko je tlak u spremniku veći od okolišnog $p_1 > p_2$ kapljevina će prodrijeti u kosu cijev. Ako je kut otklona malen, i za male vrijednosti Δp stupac u kosoj cijevi će biti dovoljno dugačak za očitavanje, a tlak u posudi ovisi o vertikalnom otklonu (h) u kosoj cijevi.



Slika 22. Kosi manometar

Za direktno očitavanje na skali uz zanemarivu pogrešku potrebno je udovoljiti uvjetu:

$$A_2 \gg A_1.$$

Za punjenje se obično uzima alkohol ili koja druga organska kapljevina.

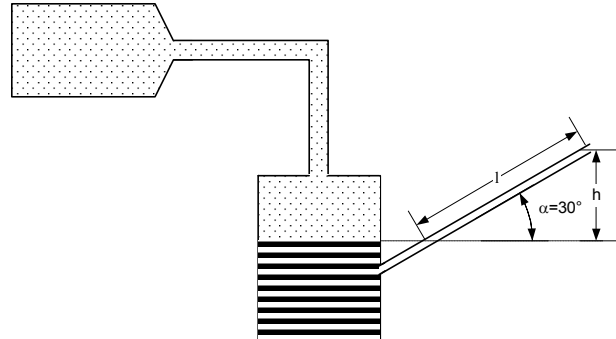
Primjenom jednadžbe manometra dobiva se izraz:

$$p_1 - \rho \cdot g \cdot h = p_2$$

$$p_M = p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta)$$

Primjer zadatka:

Na spremnik sa zrakom ugrađen je manometar s kosom cijevi, čiji je promjer znatno manji od promjera spremnika. Manometarska tekućina je etanol gustoće 850 kg m^{-3} . Izračunaj pretlak zraka u spremniku za pomak tekućine u kosoj cijevi $l=120\text{mm}$ ako je cijev nagnuta u odnosu na horizontalu za kut od 30° .



Rješenje:

$$d_{\text{cijevi}} \ll d_{\text{spremnika}}$$

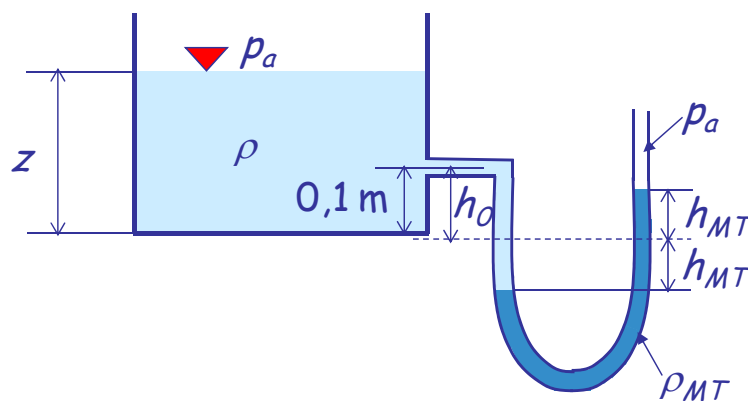
Kako je promjer kose cijevi puno manji od promjera spremnika u kojem se nalazi manometarska tekućina, promjena nivoa u spremniku može zanemariti.

$$p = \rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot g \cdot l \cdot \sin(\alpha)$$

$$p = 850 \cdot 9.81 \cdot 0.12 \cdot \sin(30)$$

$$p = 500 \text{ Pa}$$

Potrebno je odrediti razinu kapljevine u spremniku na slici 10, ako je U manometar ugrađen nokomito na bočnu stjenku spremnika na 10 cm od dna.



Slika 10.

$$\rho = 900 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\rho_{MT} = 13600 \text{ kg m}^{-3}$$

$$h = 0,3 \text{ m}$$

$$h_{MT} = 0,2 \text{ m}$$

Postavljanjem bilance tlakova koji vladaju iznad stupaca lijevog i desnog kraka manometra, dobiva se jednakost iz koje se može odrediti z :

$$p_a + (z - 0,1) \cdot g \cdot \rho + h_0 \cdot \rho + h_{MT} \cdot g \cdot \rho = p_a + 2 \cdot h_{MT} \cdot g \cdot \rho_{MT}$$

Položaj meniskusa u manometru ovisi o tlaku koji vlada iznad i visinama stupca koji tlačaju manometarsku tekućinu. Kako manometar nije priključen na dno spremnika, kao u prethodnom slučaju, potrebno je udaljenost manometra od dna oduzeti od visine stupca tekućine u spremniku ili u manometru.

$$(z - 0,1) \cdot \rho = 2 \cdot h_{MT} \cdot \rho_{MT} - h_0 \cdot \rho - h_{MT} \cdot \rho$$

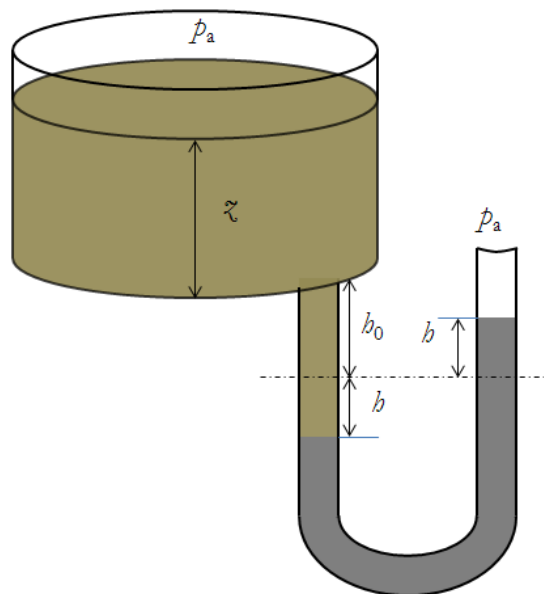
$$z = \frac{2 \cdot h_{MT} \cdot \rho_{MT} - h_0 \cdot \rho - h_{MT} \cdot \rho}{\rho} + 0,1$$

$$z = \frac{h_{MT} \cdot (2 \cdot \rho_{MT} - \rho) - h_0 \cdot \rho}{\rho} + 0,1$$

$$z = \frac{0,2 \cdot (2 \cdot 13600 - 900) - 0,3 \cdot 900}{900} + 0,1$$

$$z = 5,64 \text{ m}$$

Hidrostatski manometar se koristi za mjerenje količine fluida u spremniku oblika valjka. Odredite ovisnost visine z žive gustoće ρ_0 u desnom kraku manometra o volumenu V nafte gustoće $0,78 \text{ g cm}^{-3}$ u spremniku promjera $1,5 \text{ m}$. Visina h_0 se mjeri od ravnotežnog položaja žive prije punjenja spremnika naftom i iznosi 20 cm .



$$V = B \cdot z = R^2 \pi \cdot z \rightarrow z = \frac{V}{R^2 \pi}$$

$$p_a + (z + h_0 + h) \cdot \rho \cdot g - 2h \cdot \rho_0 \cdot g = p_A$$

$$(z + h_0 + h) \cdot \rho = 2h_{MT} \cdot \rho_0$$

$$\left(\frac{V}{R^2 \pi} + h_0 + h \right) \cdot \rho = 2h \cdot \rho_0$$

$$V = h \cdot R^2 \pi \left(2 \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) - h_0 \cdot R^2 \pi$$

$$V = h \cdot 1,5^2 \pi \left(2 \frac{13600}{780} - 1 \right) - 0,2 \cdot 1,5^2 \pi$$

$$V = 239,43 \cdot h - 1,41$$

DINAMIKA FLUIDA

KINEMATIKA FLUIDA

Kinematika fluida se bavi gibanjem fluida u vremenu i prostoru, međutim ne ulazi u uzroke gibanja, te se stoga u razmatranjima ne uzimaju u obzir sile koje uzrokuju gibanja.

Fluid se smatra kontinuumom i koristi se pojam čestica fluida – definirana kao mali dio volumena konstantne mase (materijalni volumen). Strujanje se klasificira prema osobitostima, opisuje ga fizikalno i matematički te generira modele strujanja. Potpuna iskoristivost kinematike fluida ostvaruje se primjenom u dinamici fluida.

DINAMIKA FLUIDA

Proučava sile koje djeluju na fluide, gibanja koja nastaju pod djelovanjem tih sila i interakcijama između čvrstih tijela i fluida u gibanju. Koriste se matematičke metode opisivanja strujanja fluida kao neprekidne sredine kako bi se definirali zakoni očuvanja za fluid u strujanju. U dinamici fluida ovi zakoni su univerzalni i fundamentalni. Tj. oni moraju biti zadovoljeni, bez obzira na vrstu fluida i na njegova specifična dinamička i termička svojstva. Tim zakonima pridružuje se i 2. zakon termodinamike kao uvjet stvaranja entropije.

U klasičnoj mehanici i termodinamici zakoni održanja se empirijski i aksiomatski – održavaju se jer ih nijedan eksperiment nije opovrgao.

S obzirom na broj nepoznatih funkcija zakoni održanja ne pružaju dovoljno jednadžbi pa se uz njih koriste i dodatne jednadžbe (Newtonov zakon viskoznosti, Fourierov zakon...)

Iz zakona očuvanja izvode se fundamentalne fenomenološke jednadžbe za newtonske fluide.

Za nenenewtonske fluide nužno je povezivanje s fenomenološkim reološkim jednadžbama.

Opis gibanja fluida

Fenomeni prijenosa proučavaju promjene različitih varijabli u fluidu, kao što su: temperatura, kemijska koncentracija, brzina i energija. U tom smislu možemo promatrati fluid kao niz malih čestica koje se premještaju, rotiraju i deformiraju. Objasniti fluid znači opisati gibanje čestica koje sačinjavaju fluid. Tradicionalno postoje dva načina opisa gibanja fluida (*Langrangeov* i *Eulerov*) te u novije vrijeme kombinacija oba pristupa: *Arbitrary Langrangian-Eulerian description* (ALE) koji se pokazao dobrim u računalnoj mehanici.

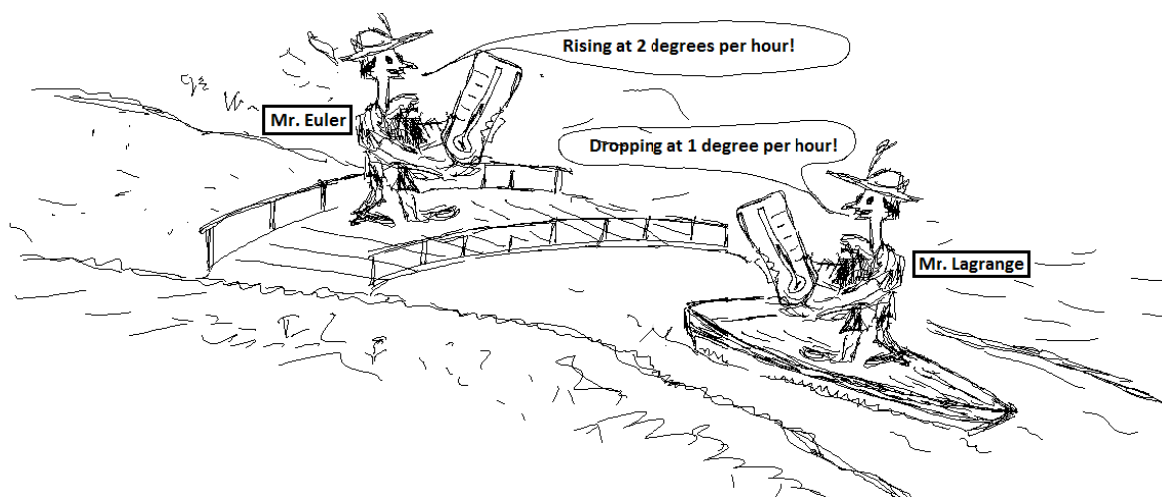
Langrangeov pristup

Prati se putanja čestice kroz prostor. (pogodno kod eksperimentiranja)

Euler-ov pristup

U nekoj fiksnoj točki prostora (definiranoj koordintama) promatraju se brzine, tlakovi i ostale veličine koje se javljaju u toj točki tijekom vremena.

Na ovaj način može se relativno jednostavno objasniti fizika fluida, dakle način da se objasni fluid je da se opiše gibanje čestice koje čine fluid. Osnovni zakoni fizike definirani su za čestice, a njih treba za potrebe mehanike fluida prevesti u odgovarajući opis polja određene fizikalne veličine u prostoru

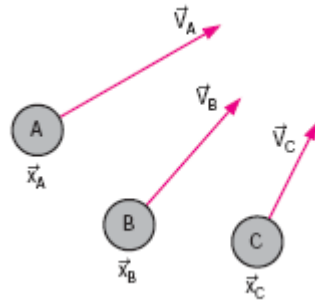
Što su Langrangeov i Eulerov opis?

Slika 23. Langrangeov i Eulerov pristup

Lagrangov ili supstitucijalni pristup

Langrangeov opis – ime po talijanskom matematičaru Josephu Louis Langranu (1736-1813)

Koristi se u klasičnoj fizici gdje se prati putanja pojedinog objekta. Koriste se Newtonovi zakoni za opis gibanja i predviđanje njihovog ponašanja (kako će se mijenjati količina ili brzina gibanja čestica). Kinematički opis tada uključuje praćenje promjene položaja vektorskim veličinama kao funkcije vremena.



Slika 24. Prema Langrangeovu opisu potrebno je pratiti putanji i brzinu svake pojedine čestice

Ovaj pristup se sastoji od praćenja svake čestice fluida u vremenu. U mehanici fluida je pogodan za opis višefaznog toka kada je lako pratiti mjehuriće plina ili čvrste čestice u kapljevini, u suprotnom bi teško bilo pratiti svaku česticu/molekulu fluida. Naime, fluid se sa makroskopskog gledišta smatra kontinuum pa interakcije među česticama fluida nije lako opisati. Sa mikroskopskog gledišta – fluid se sastoji od neizmjernog broja čestica koje se kontinuirano zabijaju jedna u drugu. Dakle, matematički opis koji uključuje opis gibanja svake čestice u svakom trenutku bilo bi teško dati. Stoga je metoda koja se češće koristi za opis je Eulerova metoda nazvana po švicarskom matematičaru Leonhardu Euleru (1707-1783).

Eulerov ili lokalni pristup

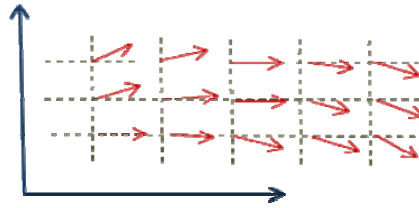
Iako se u mehanici fluida koriste oba opisa, Eulerov opis je češći zbog jednostavnijeg pristupa. Gibanje fluida veže se za određenu nepomičnu točku prostora u kojoj se gibanje promatra. Po ovoj metodi definira se kontrolni volumen kroz koji fluid prolazi te nije potrebno pratiti položaj jedne točke nego definirati polje varijabli te funkciju prostora i vremena unutar kontrolnog volumena. Matematički opis – jednostavniji jer je položaj točke konstanta (vektorska).

Polje fluida

Definiranjem polja fluida može se relativno jednostavno objasniti fizika fluida, dakle način da se objasni fluid je da se opiše gibanje čestica koje čine fluid.

Osnovni zakoni fizike definirani su za čestice, a njih treba za potrebe MF prevesti u odgovarajući opis polja i određene fizikalne veličine u prostoru

Polje fluida se kontinuirano deformira zbog gibanja fluida. Eulerov opis daje brzine pojedinih čestica u određenom položaju i vremenu.



Slika 25. Polje brzina – računanje brzina svih čestica

Zakoni očuvanja

U dinamici fluida se proučavaju osnovni zakoni očuvanja:

- ✓ ZAKON OČUVANJA MASE
- ✓ ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA
- ✓ ZAKON OČUVANJA ENERGIJE (mehaničke)

Iz zakona očuvanja izvode se fundamentalne fenomenološke jednačbe za newtonske fluide.

Za nenewtonske fluide nužno je povezivanje s fenomenološkim reološkim jednačbama.

Opći zakon očuvanja



Slika 26. Prikaz procesnog prostora sa ulazni i izlaznim strujama

\dot{V} - volumni protok, $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$

X_v - količina gibanja, tvari ili energije po jedinici volumena

V_r - količina generirane veličine X u procesnom prostoru (nastajanje ili nestajanje)

AKUMULACIJA = ULAZ – IZLAZ + GENERACIJA

$$V \cdot \frac{dX_v}{dt} = \dot{V}_{ul} \cdot X_{v,ul} - \dot{V}_{izl} \cdot X_{v,izl} + V_r$$

Najjednostavnije forme univerzalnih fizikalnih zakona odnose se na *materijalnu česticu* koja je toliko malena da su brzina v , gustoća ρ i ostala svojstva jednolika unutar nje.

Osnovni zakoni očuvanja za materijalnu česticu

- ✓ Očuvanja mase $\frac{d}{dt}(\rho \delta V) = 0$ odnosno $v_1 \cdot A_1 = konst$
- ✓ Očuvanja količine gibanja $\frac{d}{dt}(\rho \vec{v} \delta V) = 0$ odnosno $\sum_{i=0}^N F_i = 0$

$$\checkmark \text{ Očuvanja energije } z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_w$$

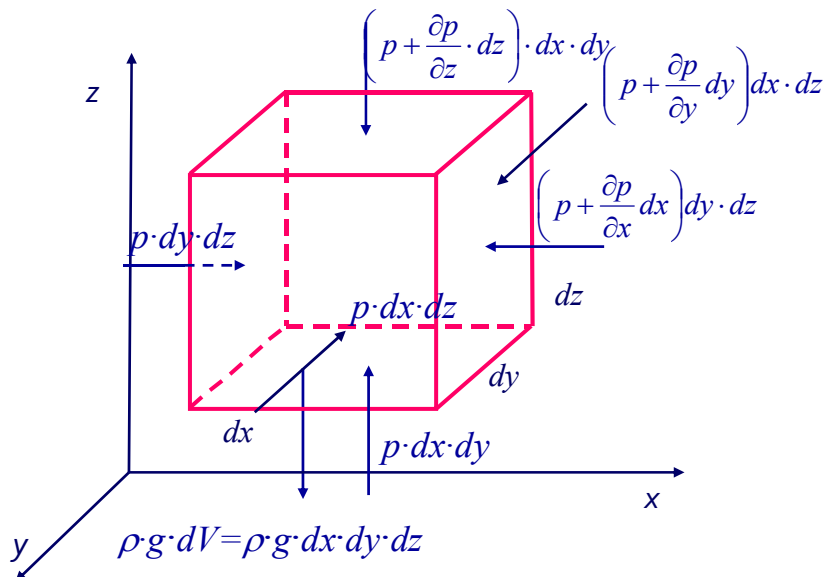
U izrazima očuvanja δ indicira infinitezimalno malenu veličinu, a d/dt se odnosi na vremensku derivaciju.

U dinamici fluida kao kontinuumu potrebno je poopćiti zakone očuvanja za materijalnu česticu na *materijalni volumen*. Materijalni volumen je sustav beskonačnog broja beskonačno malenih materijalnih čestica i uvijek (u svakom vremenskom trenutku) se sastoji od istih čestica.

ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

Promatramo elementarni volumen fluida koji struji kroz prostor.

Na djelić fluida djeluju površinske sile (tlačne sile okomito na površinu promatranog elementa, viskozne sile) i vanjska (gravitacijska sila).



Slika 27. Djelovanje sila na djelić fluida

Bilanca površinskih sila i vanjske gravitacijske sile može se iskazati Eulerovim jednadžbama za fluid u mirovanju:

$$\text{os } x: -\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\text{os } y: -\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\text{os } z: -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \cdot g = 0$$

Kod viskozno fluida u gibanju javljaju se sile trenja čija je posljedica smično naprezanje koje se

$$\text{općenito izražava: } \tau = \frac{F_{tr}}{S} = \frac{F_{tr}}{dx \cdot dz}$$

Tako je smično naprezanje na prednjoj plohi promatranog djelića volumena $dx \cdot dz$: $\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy}$

Odnosno na stražnjoj plohi $dx \cdot dz$: $\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dy$

$$\text{Rezultirajuća smična sila: } \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz - \tau \cdot dx \cdot dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz$$

Diferenciranjem izraza za smično naprezanje: $\tau = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Pretpostavka: promjena brzine v_x odvija se i obzirom na osi x i z te se sumiranjem dobiva ukupna promjena smične sile:

$$\eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = dF_{tr}$$

Uzimajući u obzir i komponentu ubrzanja u smjeru osi x , tada u smjeru osi x djeluje suma sila:

$$\left[a_x \cdot \rho - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Osnovni princip dinamike:

Suma svih sila koja djeluje na elementarni volumen fluida u gibanju jednak je inercijskoj sili koja uzrokuje gibanje.

$$F = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dv}{dt}$$

Promatrajući parcijalno za sve tri osi: $dv = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx$, $dv = \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy$, $dv = \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot dz$

Diferenciranjem po dt :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Gdje su v_x, v_y, v_z komponente brzine u smjeru osi x, y i z:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

Rezultanta sila inercije u smjeru os x, uz mogućnost promjene brzine s vremenom:

$$F_i : \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Izraz u zagradi predstavlja supstytucionalni izvod ili individualnu vremensku derivaciju i označava se s: $\frac{Dv_x}{Dt}$

Ako se prati gibanje elementarnog volumena fluida, i ukoliko se postupak diferenciranja provodi praćenjem kretanja čestice, tada se ovakav izvod naziva supstytucijalni.

U kemijskom inženjerstvu se supstytucijalni izvod primjenjuje i kod drugih fizikalnih veličina.

$$\text{Npr. } \frac{D\rho}{Dt}, \frac{Dv}{Dt}, \frac{Dc}{Dt}, \frac{DT}{Dt} \dots$$

Značenje članova npr. $\frac{D\rho}{Dt}$,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$\frac{D\rho}{Dt}$ brzina promjene veličine u zadanoj točki lokalna ili mjesna derivacija

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ovaj član ukazuje na stacionarnost (nestacionarnost) procesa

$v_x \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z}$ konvektivna promjena veličine u prostoru (zbog promjene položaja)

Izjednačavanjem svih sila koje djeluju na elementarni volumen fluida:

sila inercije = sila gravitacije + tlačne sile + viskozne sile

Gdje su sila inercije i sila gravitacije masene sile, a tlačne i viskozne unutrašnje sile.

To znači da sve sile moraju biti u ravnoteži: $\sum_{i=1}^n F_i = 0 \rightarrow \text{ZOKG}$

Sada se zakon očuvanja u skraćenom obliku može napisati:

$$\text{Za x-os: } \rho \cdot \frac{Dv_x}{Dt} = a_x \cdot \rho - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{Za y-os. } \rho \cdot \frac{Dv_y}{Dt} = a_y \cdot \rho - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{Za z-os: } \rho \cdot \frac{Dv_z}{Dt} = a_z \cdot \rho - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

Ili ukupno Navier-Stokesova jednadžba za strujanje viskoznih fluida:

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = g \cdot \rho - \nabla p + \eta \nabla^2 v$$

Navier-Stokesova jednadžba predstavlja najopćenitiji oblik zakona očuvanja količine gibanja koje opisuju laminarno strujanje viskoznih, newtonskih i nekompresibilne fluide.

Zašto najopćenitiji?

- ✓ promatra se strujanje u svim smjerovima u prostoru
- ✓ uzima se u obzir stacionarnost odnosno nestacionarnost procesa

NS jednadžba je dobila naziv po *Claude-Louisu Navieru* i *Georgu Gabrielu Stokesu*. Ove jednadžbe dobivaju se primjenom drugog newtonovog zakona na kretanje fluida, zajedno sa pretpostavkom da je naprezanje fluida suma članova koji opisuju viskoznost (proporcionalni gradijentu brzine), plus član koji označava tlak.

ZNAČENJE ČLANOVA NAVIER-STOKESOVE JEDNADŽBE:

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} \text{ predstavlja promjenu akumulacije količine gibanja s vremenom i prijenos količine gibanja}$$

u prostoru.

$g \cdot \rho$ gravitacijski član (gravitacijska sila)

$-\nabla p$ gradijent tlaka (predznak - znači da tlak opada u smjeru gibanja zbog gubitka energije uslijed viskoznog trenja)

$\eta \nabla^2 v$ viskozne sile

Svaki član ima dimenziju, $N \cdot m^{-3}$ i ima značenje sile po jedinici volumena.

RJEŠENJA NAVIER – STOCKESOVE JEDNADŽBE

Navier – Stokesova jednadžba koja je definirana za Cartesiev koordinatni sustav (uz pretpostavku da se radi o newtonskom fluidu uz konstantna termodinamička i transportna svojstva) u vektorskom obliku vrijedi za bilo koji ortogonalni koordinatni sustav. Ova jednadžba je temelj za proračune u mehanici fluida.

NSJ -nelinearna jednadžba 2. reda, vrijedi za nestacionarne uvjete, u diferencijalnom obliku je, ima četiri nepoznanice (tri komponente brzine i tlak), a definirana je sa tri jednadžbe (izražena je vektorski).

Za točno rješenje NS jednadžbe potrebno je koristiti punu jednadžbu te dodatnu četvrta jednadžba

(jednadžba očuvanja mase), za nekompresibilne fluide (kapljevine): $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

Često su rješenja Navier-Stokesove jednadžbe moguća jedino uz niz aproksimacija kako bi se smanjio broj nepoznanica. Za približna rješenja koristi se pojednostavljena jednadžba, npr. gibanje u jednom smjeru i u stacionarnim uvjetima za laminarno strujanje-

Približna rješenja NSJ

Za idealni (neviskozni) fluid: $\eta = 0$ koristi se Eulerova jednadžba gibanja idealnog fluida:

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = g \cdot \rho - \nabla p$$

Za fluid u mirovanju vrijedi Eulerova jednadžba ravnoteže u stanju mirovanja fluida:

$$g \cdot \rho - \nabla p = 0$$

Točna rješenja NSJ

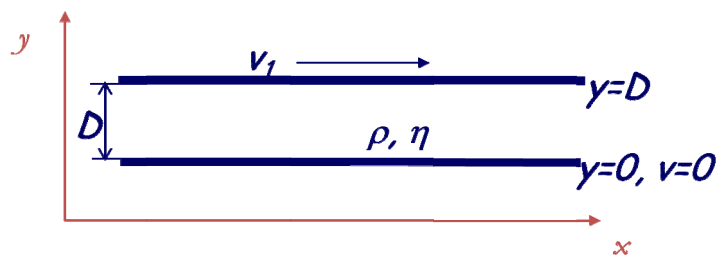
Da bi sustav bio rješiv mora biti jednostavan. Primjenjuje se u potpuno razvijenim uvjetima te uz pretpostavku beskonačnosti kako bi se konvektivni član na lijevoj strani zanemario. Za laminarno, dvodimenzionalno te stacionarno strujanje.

6 osnovnih koraka za rješavanje:

- ✓ Definirati problem i geometriju sustava, identificirati sve relevantne dimenzije i parametre
- ✓ Nabrojati sve pretpostavke, aproksimacije, pojednostavljenja i granične uvjete
- ✓ Pojednostaviti diferencijalne jednadžbe gibanja u najvećoj mogućoj mjeri
- ✓ Integrirati jednadžbe da bi se dobile konstante
- ✓ Primijeniti granične uvjete kako bi se riješili integrali
- ✓ Verificirati rješenja

Rješenja Navier – Stokesovih jednadžbi - Couetteovo gibanje

Couetteovo gibanje definirano je strujanjem viskoznog, nestlačivog newtonskog fluida koji struji između dvije beskonačne ploče. Donja ploča miruje, a gornja se giba konstantnom brzinom, v_1 . Strujanje je laminarno, stacionarno. Nema dodatnog tlaka, osim hidrostatskog. Potrebno je izračunati polje brzina i tlaka.

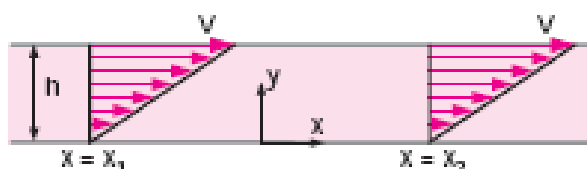


Slika 29. Couetovo gibanje

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot a - \nabla p + \eta \cdot \nabla^2 v$$

1. korak

U cijevi se uspostavlja se konstantan profil brzina u smjeru strujanja – nema promjene profila u smjeru strujanja.



Slika 30. Geometrija sustava - potpuno razvijeno područje toka fluida gdje se profila brzina ne mijenja s udaljenošću u cijevi

2. korak

Pretpostavke:

1. Ploče su beskonačne u smjeru x i z .
2. Stacionarno gibanje
3. Paralelan tok, pretpostavka je da je komponenta brzine u smjeru osi y $v_y=0$
4. Fluid je nekomresibilan, Newtonski s konstantnim svojstvima, giba se laminarno
5. Tlak u smjeru osi x je nepromjenjiv
6. Polje brzina je dvodimenzionalno, odnosno nema promjene brzine u smjeru osi z , $v_z=0$.
7. Gravitacija djeluje prema dolje, $a_x=a_y=0$, $a_z=-g$

Granični uvjeti:

8. $y=0$; $v_x, v_y, v_z=0$
9. $y=D$; $v_x=v_1, v_y, v_z=0$

3. korak

Pojednostaviti diferencijalne jednadžbe gibanja

Jednadžba za os x :

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z \right) = \rho \cdot a_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

Kako se uspostavlja stacionarno gibanje: $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$

Ubrzanje u smjeru osi x : $a_x = 0$

Zbog jednosmjernog gibanja komponente brzina u smjeru osi x i z su 0: $v_y = 0, v_z = 0$

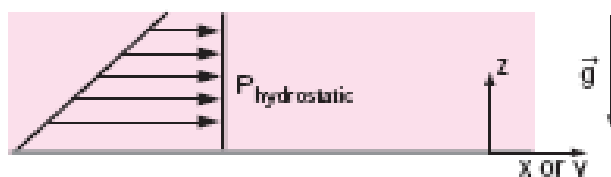
$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y = 0, \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z = 0$$

Gradijent brzine postoji samo u smjeru osi y : $\frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0, \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$

Gradijent tlaka postoji samo prema vertikalnoj osi.

Uzevši u obzir sva pojednostavljena promjena brzinskog polja iznosi: $\frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0$

Promjena tlaka: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0$



Slika 31. .Kod nekompresibilnih fluida bez slobodne površine hidrostatički tlak ne utječe na dinamiku toka fluida

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g$$

4. korak

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0$$

1. stupanj integracije $\frac{dv_x}{dy} = c_1$

2. stupanj integracije $v_x = c_1 \cdot y + c_2$

Gdje su c_1 i c_2 konstante integracije

Uz granične uvjete:

$$y=0; v_x, v_y, v_z = 0$$

$$y=D; v_x = v_1, v_y, v_z = 0$$

$$0 = c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$v_1 = c_1 \cdot D + 0 \Rightarrow c_1 = \frac{v_1}{D}$$

$$v_x = \frac{v_1}{D} \cdot y$$

U nekompresibilnom polju fluida bez slobodne površine, hidrostaticki tlak ne doprinosi dinamici toka fluida.

$$\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g \quad p = -\rho \cdot gz + c_3$$

5. korak

Za nekompresibilne fluide, apsolutni tlak može biti definiran samo za slučaj da je p definiran na nekom mjestu, npr. ako je $p=p_0$, tada je $p_0=c_3$

Konačno rješenje za polje tlaka je: $p = p_0 - \rho \cdot g \cdot z$

Rješenja Navier – Stokesovih jednadžbi - Bernoullijeva jednadžba

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot g - \nabla p + \eta \cdot \nabla^2 v$$

Za neviskozni fluid posljednji član NS jednadžbe je 0: $\eta \cdot \nabla^2 v = 0$

$$\frac{Dv}{Dt} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z \right)$$

U stacionarnim uvjetima promjena brzine s vremenom: $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$

Za x- os $v_y = 0, v_z = 0$, a isto vrijedi i za y os i za z os.

Gravitacijska sila djeluje samo u smjeru osi z, $g_x = 0$ i $g_y = 0$

$$\rho \cdot v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \rho \cdot g - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Slijedi:

$$\text{os } x: \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad | \cdot dx$$

$$\text{os } y: \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot v_y = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad | \cdot dy$$

$$\text{os } z: \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot v_z = -g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad | \cdot dz$$

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot dz = -g \cdot dz - \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right)$$

Kod stacionarnog strujanja kada je p funkcija samo položaja izraz u zagradi predstavlja totalni diferencijal dp .

Izraz na lijevoj strani jednadžbe predstavlja totalni diferencijal brzine dv pomnožen s odgovarajućim komponentama brzine v .

$$\text{Dakle: } v \cdot dv = -g \cdot dz - \frac{dp}{\rho}$$

$$\text{Budući da vrijedi: } v \cdot dv = d\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

$$\text{Slijedi: } d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -g \cdot dz - \frac{dp}{\rho}$$

$$dz + \frac{dp}{\rho \cdot g} + d\left(\frac{v^2}{2 \cdot g}\right) = 0$$

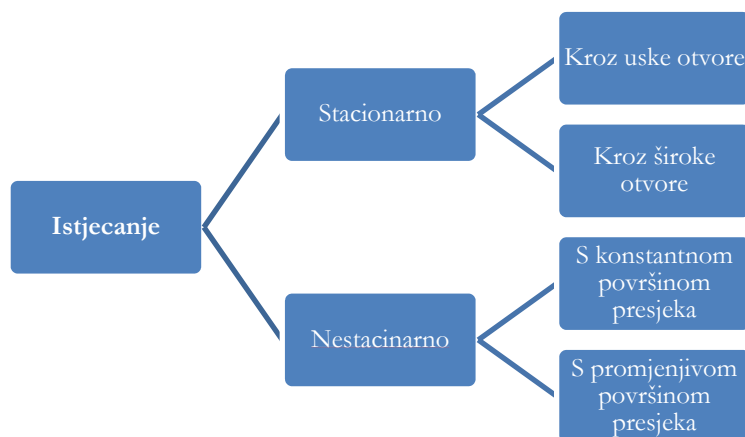
Za nekompresibilni fluid: $\rho = \text{konst}$, a budući da je i $g = \text{konst}$. može se pisati:

$$d\left(z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g}\right) = 0$$

Integriranjem dobije se Bernoullieva jednadžba za idealni fluid: $z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} = \text{konst.}$

ISTJECANJE

U praksi se često javlja potreba za izračunavanjem protoka kroz otvore koji se nalaze na dnu ili na bočnoj stijenci posude s kapljevnom. Također moguće je određivati i vrijeme potrebno da kapljevina istiche iz spremnika u cijelosti ili djelomično. Razlikuju se uski ili široki otvori, a proces može biti stacionaran ili nestacionaran.



Slika 32. Podjela istjecanja

Istjecanje kapljevine iz otvorenog spremnika je nestacionarna pojava ako se kapljevina ne nadoknađuje ili ako površina razine u spremniku nije velika u odnosu na površinu otvora (u suprotnom imamo stacionarno pražnjenje spremnika).

Uz konstantnu visinu u spremniku, z , brzina istjecanja iz spremnika kroz otvor na dnu je konstantna, $v = \text{konst.}$ Brzina se može odrediti prema Torricelievom zakonu: $v = \sqrt{2 \cdot z \cdot g}$

Ukoliko se kapljevina u spremniku ne nadoknađuje, visina kapljevine se mijenja pa je proces nestacionaran; $z \neq \text{konst.}$ $\rightarrow v(t) = \sqrt{2 \cdot z(t) \cdot g}$.

Proračun

Na dvije točke 1 i 2 promatra se bilo koja strujnice od razine u spremniku do izlaznog mlaza te se može primijeniti Bernoullieva jednačica i jednačica kontinuiteta:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}, \quad v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Kapljevina iz rezervoara može izlaziti kroz otvor na stijenci ili kroz kratku izlaznu cijev – u oba slučaja radi se o pojavi istjecanja.

Ovisno o veličini otvora može se definirati istjecanje kroz uske ili široke otvore.

Vrste otvora za istjecanje

Postoje različite izvedbe otvora za istjecanje, ovisno o veličini, obliku poprečnog presjeka, obliku rubova te načinu pražnjenja

A. Prema veličini otvora:

- Uski otvori
- Široki otvori

B. Prema obliku poprečnog presjeka otvora:

- Kružni
- Četvrtasti
- Trokutasti otvor

C. Prema obliku ruba:

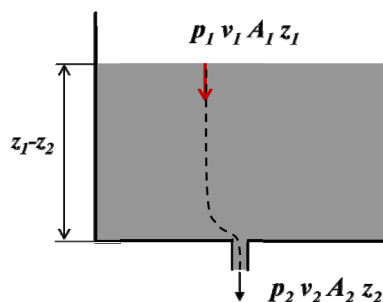
- Oštri
- Zaobljeni

D. Prema načinu pražnjenja:

- Potpuno uronjen otvor
- Djelomično uronjen otvor

Stacionarno istjecanje kapljevine kroz uski otvor

Promatramo istjecanje iz spremnika uz nepromjenjivu razinu kapljevine u spremniku (za idealni neviskozni fluid). Kod istjecanja kroz uske otvore smatra se da je otvor tako mali da se može zanemariti promjena hidrostatskog tlaka po površini poprečnog presjeka. Za otvor promjera a na dubini z vrijedi: $z \gg a$, a $\Delta z = \text{konst.}$



Slika 33. Istjecanje iz spremnika uz konstantnu visinu kapljevine u spremniku.

Na slici je prikazana zamišljena strujnica čestice čija putanja ide sa površine vode u spremniku te prolazi kroz središte otvora. Potrebno je izračunati brzinu istjecanja v_2 . Postavlja se Bernoullijeva jednadžba za mjesto 1 i 2 (J/kg):

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

uvrstimo u Bernoullijevu jednadžbu jednadžbu kontinuiteta:

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1}$$

Kombinacijom ovih jednadžbi, moguće je dobiti izraz za idealnu brzinu istjecanja za određenu razliku Δz :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2} \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} + \Delta z \cdot g\right)}$$

Ovako dobivena brzina idealna je ne uzima u obzir određene pojave koje se javljaju prilikom istjecanja viskozne kapljevine kroz uski otvor.

Kada je $A_1 \gg A_2$ tada se $\frac{A_2^2}{A_1}$ može zanemariti, zbog istog razloga brzina u spremniku

može se zanemariti ($v_2 \ll v_1$)

Za otvoreni spremnik, $p_1 = p_2$

Dakle, ako je spremnik otvoren i za neviskozni fluid prethodna jednadžba prelazi u Torricellijevu jednadžba za brzinu istjecanja idealnih fluida:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta z}$$

Ukoliko je $\frac{p_1 - p_2}{\rho} \gg g \cdot \Delta z$, tada se $g \cdot \Delta z$ može zanemariti te se za brzinu istjecanja

neviskoznog fluida dobije slijedeća jednadžba:

$$v_2 \cong \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}$$

Istjecanje u realnim uvjetima

Stvarna brzina istjecanja je uvijek manja od teoretske, a zbog viskoznosti fluida, površinske napetosti te zbog otpora pri istjecanju u okoliš. Nerazmjer između stvarnih i teoretskih vrijednosti može se korigirati korištenjem hidrauličkih faktora.

Zbog svojstava viskoznosti dolazi do gubitaka energije, tako da je stvarna brzina istjecanja smanjena u odnosu na neviskozni fluid. Osnovni uzrok gubitka energije je mjesni otpor istjecanja.

Zbog toga se za viskozne, realne fluide dodaje energetski član koji se odnosi na savladavanje

$$\text{mjesnog otpora. } \frac{v^2_2}{2g} + \zeta \cdot \frac{v^2_2}{2g} = \Delta z_{uk}$$

Visinu stupca kapljevine treba uvećati zbog postojanja mjesnog otpora:

Izraz za brzinu istjecanja realnog fluida je:

$$v_{stv} = \frac{\sqrt{2 \cdot \Delta z \cdot g}}{\sqrt{1 + \zeta}}$$

Hidraulički faktori

Postoje 4 faktora kojima se mogu definirati gubitci prilikom istjecanja:

- ✓ Brzinski faktor $\Rightarrow c_v = \text{brzina u vena contracti} / \text{brzina na presjeku mlaznice}$
- ✓ Faktor kontrakcije $\Rightarrow c_c = \text{površina presjeka vena contracti} / \text{površina otvora mlaznice}$
- ✓ Faktor istjecanja $\Rightarrow \mu_i = c_v \cdot c_c$
- ✓ Faktor otpora \Rightarrow zbog otpora pri protjecanju kroz mlaznicu

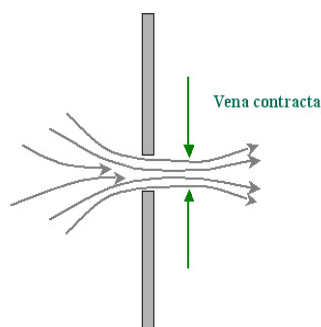
Brzinski faktor (faktor smanjenja brzine) određuje se eksperimentalno. Definiran je kao odnos prave vrijednosti brzine (u vena contracti) i teoretske brzine mlaza. Npr. ukoliko se otvor izvede sa zaobljenim rubovima, postiže se faktor vrijednosti 0,98.

Pri istjecanju kroz uski otvor može se uočiti pojava suženja mlaza (smanjenje presjeka nakon izlaska iz cijevi), radi se o kontrakciji mlaza zbog inertnosti strujnica kapljevine pri istjecanju i prolasku kroz suženje, tzv. *vena contracti*.

Zbog ove pojave uvodi se faktor kontrakcije mlaza.

Vena contracta

Pri istjecanju kroz oštre rubove dolazi do suženja mlaza kapljevine ($A_m < A_0$). Naime čestice kapljevine ne mogu skretati oko oštih rubova u lomljenim strujnicama, već ih zaobilaze u blagim zakrivljenjima i tek se na nekoj udaljenosti od ravnine otvora izravnavaju u pravocrtne i paralelne strujnice (za kružne otvore približno $0,5 \cdot D$), presjek na tom mjestu je manji od presjeka mlaznice. Presjek mlaza A_m gdje se uspostavlja konstantan tok, naziva se VENA CONTRACTA (suženi ili kontrahirani presjek).



Slika 34. Prikaz vena contracte

Odnos površina na mjestu vena contracte i površine otvora za istjecanje određuje faktor

$$\text{kontrakcije mlaza } c_c = \frac{A_m}{A_0}$$

Odnos brzine stvarne brzine (na mjestu vena contracte) i brzine istjecanja na otvoru definira

$$\text{faktor istjecanja: } c_v = \frac{v_m}{v_0}.$$

Stvarni volumni protok određuje se iz stvarne brzine i poprečnog presjeka vena contracte:

$$\dot{V}_{stv} = A_m \cdot v_{stv} = c_c \cdot A_0 \cdot c_v \cdot v = \mu_i \cdot A_0 \cdot v$$

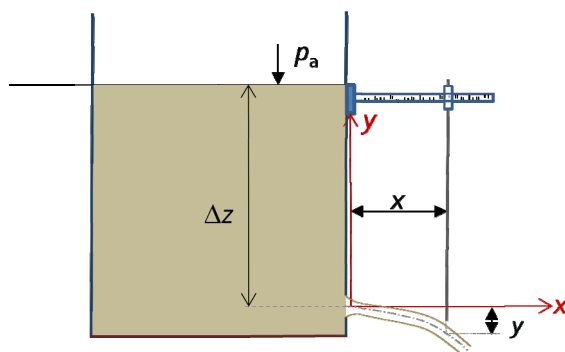
Ovdje je μ_i faktor istjecanja, umnožak faktora kontrakcije mlaza i faktora istjecanja.

Poznavanjem faktora istjecanja može se odrediti stvarani protok ili brzina istjecanja:

$$\dot{V}_{stv} = \mu_i \cdot A_0 \sqrt{2 \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} + \Delta z \cdot g \right)}.$$

Baždarenje faktora

Vrijednosti faktora kontrakcije (brzinski faktor, faktor kontrakcije) moguće je odrediti eksperimentalnim mjerenjem. Baždarenje se određuje mjerenjem geometrije slobodnog mlaza vode pri istjecanju mlaza kroz oštri rub. U stacionarnom načinu rada izmjere se koordinate x i y za više karakterističnih točaka mlaza te visina Δz :



Slika 35. Baždarenje brzinskog faktora i faktora kontrakcije

Jednadžba horizontalnog mlaza vode (jed. za kosi hitac), brzina u nekom presjeku je: $v_c = x \sqrt{\frac{g}{2y}}$

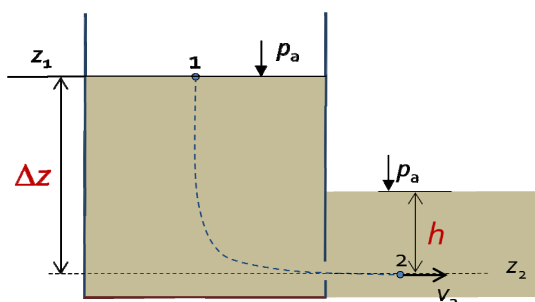
Faktor istjecanja se može odrediti iz formule: $c_v = \frac{v_c}{\sqrt{2gh}}$.

Uz poznati volumni protok može se odrediti i faktor kontrakcije: $c_c = \frac{\dot{V}_{stv}}{A_0 \cdot c_v \cdot v}$

STACIONARNO ISTJECANJE

Istjecanje kapljevine iz spremnika uz konstantnu razinu moguće je u različitim uvjetima, ovdje su prikazani neki od njih te su dani izrazi za brzinu istjecanja za svaki od spomenutih.

Istjecanje ispod površine kapljevine



Slika 36. Istjecanje ispod površine kapljevine

U slučaju istjecanja kapljevine ispod razine kapljevine, u Bernoullijevu jednadžbu potrebno je uvrstiti i hidrostatski tlak kapljevine na mjestu istjecanja. Ovaj hidrostatski tlak je rezultat djelovanja stupca kapljevine iznad mjesta 2 (mjesta istjecanja).

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

Ukoliko je tlak iznad kapljevine jednak atmosferskom tada je tlak na mjestu 2:

$$p_2 = p_a + \rho \cdot g \cdot h$$

Ako je spremnik otvoren tada je:

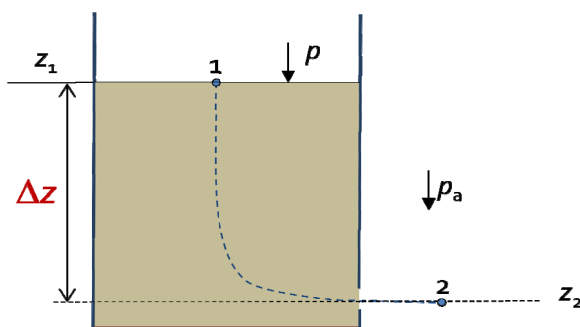
$$p_1 = p_a; v_1 = 0,$$

Kako je već spomenuto, brzina u spremniku pri istjecanju je zanemariva.

$$\text{Iz Bernoullieve jednadžbe } z_1 \cdot g + \frac{p_a}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_a + \rho \cdot g \cdot h}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

može se odrediti brzina istjecanja koja u idealnim uvjetima iznosi: $v_2 = \sqrt{2 \cdot g(\Delta z - h)}$

Istjecanje pod tlakom



Slika 37. Istjecanje pod tlakom

Ukoliko do istjecanja dolazi kada je spremnik pod tlakom, tada je taj tlak potrebno uzeti u proračun budući da on utječe na brzinu istjecanja kapljevine. U Bernoullievu jednadžbu, umjesto atmosferskog tlaka (kao u slučaju otvorenog spremnika) na lijevu stranu jednadžbe stavlja se tlak koji vlada u spremniku. Kao i do sada zbog istjecanja kroz mali otvor, brzina strujanja u spremniku, v_1 je približno 0. Budući se tlak u posudi se može izraziti kao zbroj atmosferskog i relativnog tlaka može se pisati:

$$z_1 \cdot g + \frac{p_a + \Delta p}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_a}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}.$$

Tada je idealna brzina istjecanja:

$$v_2 = \sqrt{2g \left(\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} \right)}$$

Istjecanje kroz široki otvor

U slučaju istjecanja kapljevine kroz široki otvor potrebno je uzeti u obzir raspodjelu hidrostatskog tlaka po visini / dubini mlaza. Tlak na vrhu otvora bit će manji od onog na dnu. Brzina istjecanja po presjeku pravokutnog otvora će se povećavati što se ne može zanemariti pa se mora integrirati po površini otvora za istjecanje:

$$d\dot{V} = \mu \cdot b \sqrt{2gz} dz$$

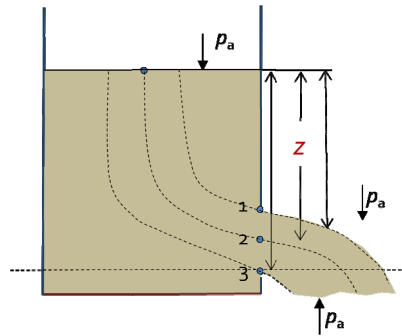
Gdje je:

b – širina otvora.

Integracijom po visini otvora dobiva se izraz za ukupni protok:

$$d\dot{V} = \mu \cdot b \sqrt{2g} \int_{z_3}^{z_1} z^{1/2} dz$$

$$\dot{V} = \frac{2}{3} b \sqrt{2 \cdot g} \left(z_3^{3/2} - z_1^{3/2} \right)$$



Slika 38. Istjecanje kroz široki otvor

Istjecanje kroz otvor ispred kojeg kapljevina ne miruje

Ako kapljevina ispred otvora ne miruje, $v_1 \neq 0$, brzinski član na lijevoj strani više nije 0.

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

Izraz za brzinu istjecanja glasi: $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta z + v_1^2}$

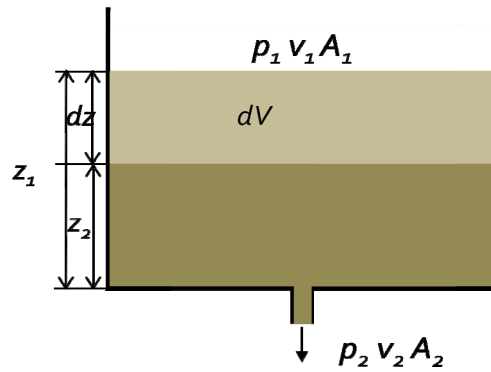
NESTACIONARNO ISTJECANJE



Slika 39. Različiti oblici spremnika

Izraz za izračunavanje vremena potrebnog da se isprazni spremnik s promjenjivom razinom kapljevine ovisit će o obliku spremnika iz kojeg kapljevina istječe. Ovisno o obliku spremnika pri istjecanju, površina slobodne površine kapljevine može se i ne mora mijenjati. O tome će ovisit i proračun za pojedini spremnik.

Istjecanje iz spremnika s promjenjivom razinom kapljevine i stalnim presjekom slobodne površine



Slika 40. Istjecanje iz spremnika s promjenjivom razinom kapljevine i stalnim presjekom slobodne površine

Ukoliko se iz spremnika stalnog poprečnog presjeka ispušta voda kroz uski otvor na dnu, mijenja se visina kapljevine u spremniku što utječe na brzinu istjecanja, radi se o nestacionarnom procesu.

$$z = f(t)$$

$$\frac{dv}{dt} \neq 0$$

Da bi smo odredili vrijeme istjecanja, potrebno je definirati promjenu volumena kapljevine u spremniku. Promjena volumena s vremenom izražena je preko površine otvora za istjecanje i stvarne brzine istjecanja:

$$-\frac{dV}{dt} = \mu_i \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot$$

Promjena volumena u nekom vremenu može se izraziti umnoškom površine presjeka spremnika i promjene visine kapljevine:

$$dV = A_1 \cdot dz$$

Izjednačavanjem i sređivanjem ova dva izraza, dobije se diferencijalna jednačba koju je potrebno integrirati da bi se dobilo vrijeme istjecanja kapljevine u određenim granicama.

$$-A_1 \cdot dz = \mu_i \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot dt$$

$$dt = -\frac{A_1 \cdot dz}{\mu_i \cdot A_2 \cdot v_2}$$

$$dt = -\frac{A_1 \cdot dz}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g \cdot z}}$$

Ukoliko je $A_1 = \text{konst.}$ vrijedi:

za pražnjenje spremnika do kraja od z_i do $z_0=0$

$$t = \frac{2 \cdot A_1}{\mu \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} \sqrt{z_1}$$

do određene visine u spremniku od z_1 do z_2

$$t = \frac{2 \cdot A_1}{\mu \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})$$

Pražnjenje spremnika s promjenjivom razinom kapljevine promjenjivim površinom

Kada se slobodna površina mijenja tijekom pražnjenja spremnika potrebno je tu promjenu uzeti u obzir i pri određivanju vremena pražnjenja.

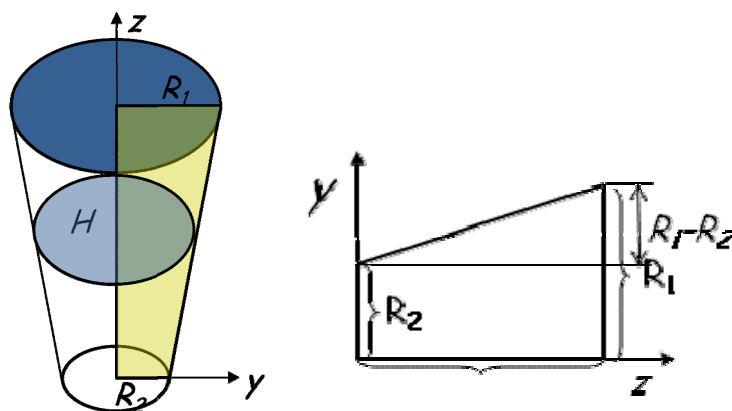
Potrebno je pronaći funkciju koja definira promjenjivu površinu A_1 i integrirati preko visine nivoa kapljevine u spremniku.

$$t = \frac{1}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} \int_0^{z_1} A(z) \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

U slijedećem dijelu dani su primjeri za neke oblike spremnika.

Krnji stožac

Da je primjer proračuna slobodne površine i vremena potrebnog za pražnjenje spremnika krnjeg stošca kroz donju bazu stošca. Da bi se definirala funkcija po kojoj se površina mijenja s visinom pražnjenja, promjena promjera slobodne površine kapljevine s visinom prikazana je u koordinatnom sustavu, gdje horizontalna os predstavlja visinu stošca, a vertikalna os polumjer površine.



Slika 41. Geometrija spremnika u obliku krnjeg stošca

Funkcija promjene polumjera s visinom je linearna i može se izraziti jednadžbom pravca:

$$y = a \cdot z + b$$

$$A = R(z)^2 \cdot \pi = y^2 \cdot \pi$$

Izraz za površinu poprečnog presjeka:

$$\begin{aligned} A(z) &= \left(\frac{R_1 - R_2}{H} \cdot z + R_2 \right)^2 \cdot \pi \\ &= \left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right)^2 \cdot z^2 \cdot \pi + 2 \cdot R_2 \cdot \pi \cdot z \left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right) + R_2^2 \cdot \pi \end{aligned}$$

Dobivenu površinu potrebno je uvrstiti u izraz:

$$t = \frac{1}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} \int_0^{z_1} A_1 \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} \int_0^z \left[\left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right)^2 \cdot z^2 + 2 \cdot R_2 \cdot z \cdot \left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right) + R_2^2 \right] \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{\pi}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} \int_0^z \left[\left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right)^2 \cdot z^{3/2} + 2 \cdot R_2 \cdot z^{1/2} \cdot \left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right) + R_2^2 \cdot z^{-1/2} \right] \cdot dz \end{aligned}$$

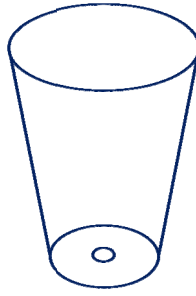
$$t = \frac{\pi}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left[\left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right)^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot z^{5/2} + 2 \cdot R_2 \cdot \left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot z^{3/2} + R_2^2 \cdot 2 \cdot z^{1/2} \right] \Bigg|_0^H$$

$$t = \frac{\pi}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \left[\left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right)^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot H^{5/2} + 2 \cdot R_2 \cdot \left(\frac{R_1 - R_2}{H} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot H^{3/2} + R_2^2 \cdot 2 \cdot H^{1/2} \right]$$

Sređivanjem se dobiva izraz koji služi za određivanje vremena istjecanja kroz donju bazu:

$$t = \frac{\pi \cdot \sqrt{H}}{\mu_i R_2^2 \cdot \pi \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot R_1^2 + \frac{8}{15} \cdot R_1 \cdot R_2 + \frac{16}{15} R_2^2 \right) \quad t = \frac{\sqrt{H}}{15 \cdot \mu_i \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left(6 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 + 8 \cdot \frac{R_1}{R_2} + 16 \right)$$

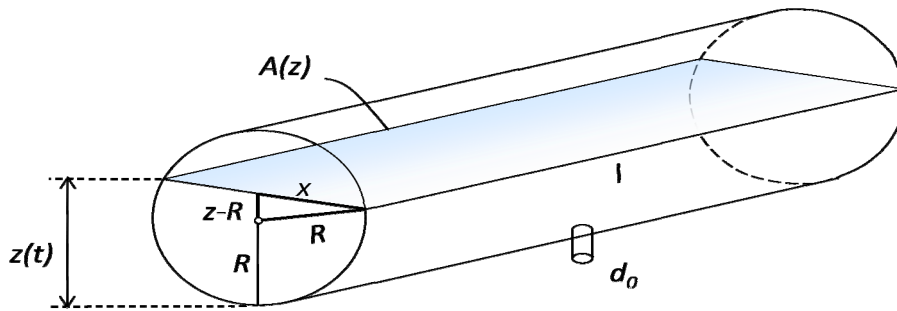
Za spremnik sa dodatnim otvorom na dnu:



Slika 42. Spremnik u obliku krnjeg stošca sa dodatnim otvorom na dnu

$$t = \frac{\pi \cdot \sqrt{H}}{\mu_i A_0 \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot R_1^2 + \frac{8}{15} \cdot R_1 \cdot R_2 + \frac{16}{15} R_2^2 \right)$$

Spremnik u obliku položenog valjka



Slika 43. Geometrija spremnika u obliku položenog valjka

$$A(z) = 2 \cdot x \cdot l \quad x = f(z)$$

$$x^2 = R^2 - (z - R)^2 = R^2 - z^2 + 2 \cdot z \cdot R - R^2 = 2 \cdot z \cdot R - z^2$$

$$x = \sqrt{D \cdot z - z^2}$$

$$A(z) = 2 \cdot l \cdot \sqrt{D \cdot z - z^2}$$

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{\mu_i \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \int_D^0 2 \cdot l \cdot \sqrt{D \cdot z - z^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= -\frac{2 \cdot l}{\mu_i \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_D^0 \sqrt{D - z} \cdot dz \end{aligned}$$

Integral se rješava uz supstituciju: $D-z = y$; $-dz = dy$

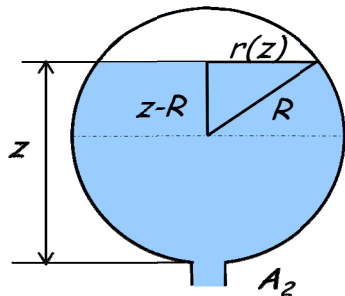
$$t = \frac{2 \cdot l}{\mu_i \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \int_D^0 \sqrt{y} \cdot dy = \frac{2 \cdot l}{\mu_i \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2} \Big|_D^0$$

$$t = \frac{4 \cdot l}{3 \cdot \mu_i \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \cdot (D-z)^{3/2} \Big|$$

$$t = \frac{4 \cdot l}{3 \cdot \mu_i \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \cdot (D-z)^{3/2} \Big|_{z_1}^{z_2}$$

$$t = \frac{4 \cdot l}{3 \cdot \mu_i \cdot A_0 \cdot \sqrt{2g}} \cdot D^{3/2}$$

Spremnik u obliku kugle



Slika 44. Geometrija spremnika u obliku kugle

$$A_1 = A(z)$$

$$A(z) = r(z)^2 \cdot \pi$$

$$A(z) = (D \cdot z - z^2) \cdot \pi$$

$$r(z)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{D}{2}\right)^2$$

$$r(z) = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{D}{2}\right)^2} = \sqrt{D \cdot z - z^2}$$

$$t = \frac{\pi}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} \int_{z=0}^{z=D} (D \cdot z - z^2) \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$t = \frac{\pi}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} \left| D \cdot \frac{z^{3/2}}{3/2} - \frac{z^{5/2}}{5/2} \right|_0^D$$

Izraz za kuglu napunjenu do vrha

$$t = \frac{\pi}{\mu_i \cdot A_2 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \frac{4}{15} \cdot D^{5/2}$$

TRANSPORT KAPLJEVINE

Radni i pogonski strojevi

Radni strojevi pretvaraju raspoloživu mehaničku energiju pretvaraju u potreban oblik energije.

- ✓ Pumpe
- ✓ Kompresori
- ✓ Ventilatori
- ✓ Električni generatori

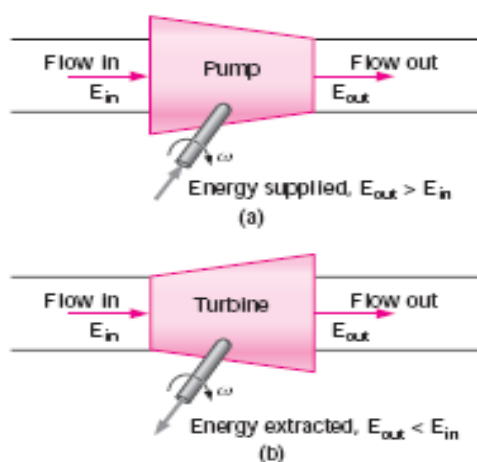
Pogonski strojevi raspoloživu energiju pretvaraju u mehanički rad

- ✓ Hidraulički pogonski strojevi
- ✓ Toplinski pogonski strojevi
- ✓ Elektromotori

Hidraulički strojevi mogu biti: radni strojevi (pumpe i ventilatori) i pogonski strojevi (vodna kola i turbine)

PUMPE - *energy absorbing devices* – u pumpu se dovodi energija, a ona je predaje fluidu. Povećanje energije najčešće se odražava na povišenje tlaka fluida, a ne dolazi nužno do povećanja brzine.

TURBINE - *energy producing devices* – oni koriste energiju fluida i prenose je u neki oblik mehaničke energije. Fluid na izlasku ima manju energiju, dakle dolazi pad tlaka, što ne dovodi nužno do smanjenja brzine fluida.



Slika 45. a) Pumpe daju energiju fluidu b) turbine koriste energiju fluida.

Uređaji koji pokreću kapljevину su pumpe, a oni koji pokreću plin, nazivaju se ventilatori, kompresori.

	ventilator	blower	kompresor
Δp	nizak	srednji	visok
\dot{V}	velik	srednji	mali

PUMPE

Pumpa je hidraulički radni stroj koji prima mehaničku energiju od nekog pogonskog stroja i pretvara je u hidrauličku energiju kapljevine koja protječe.

Služe za transport kapljevine, podizanje na višu razinu ili u područje višeg tlaka.

- ✓ Dio su gotovo svakog procesa u kemijskoj procesnoj industriji
- ✓ Razlikuju se po načinu pretvaranja energije i po konstrukciji
- ✓ 80 % centrifugalne pumpe (ostale za posebne namjene)

Pumpno postrojenje sastoji se od:

- ✓ pumpe,
- ✓ tlačnog cjevovoda
- ✓ usisnog cjevovoda,
- ✓ pogonskog stroja

Pogonski stroj (motor) dovodi u vrtnju rotor pumpe (ili pokreće stap, ovisno o tipu pumpe) u kućištu se stvara pottlak, kapljevina ulazi u usisni cjevovod i u pumpu s nekim početnim tlakom. U pumpi se kapljevini predaje tlačan energija te je u tlačnom cjevovodu tlak kapljevine veći od početnog.

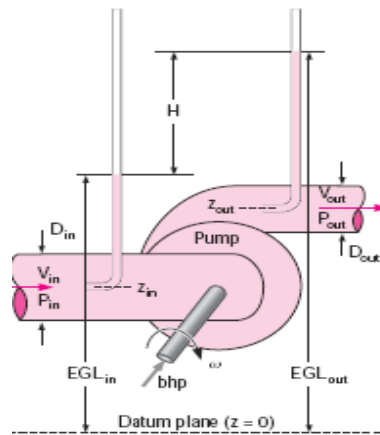
OSNOVNI PARAMETRI PUMPE

Koriste se kako bi se definirala svojstva pumpe:

- ✓ Maseni protok kapljevine za nekompresibilne fluide, najčešće se koristi volumni protok koji se često naziva i kapacitet (bitno je definirati minimalni protok kroz pumpu)
- ✓ Dobavna visina pumpe (*net head*), ukupna energija predana kapljevini prolaskom kroz pumpu (uz zadovoljavajući NPSH):
$$H = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right)$$
- ✓ Djelotvornost pumpe (odnos korisne i dovedene snage)
- ✓ Snaga pumpe

Visina dobave pumpe izražena visinom stupca kapljevine

Dobavna visina pumpe (Net head)



Slika 46. Mjerenje dobavne visine pumpe

Dobavna visina pumpe obično se izražava ekvivalentnom visinom vodenog stupca, bez obzira na kapljevinu u pumpi. Mjera je za tlak, a određuje se kao razlika specifičnih energija prije i nakon pumpe, podrazumijeva energiju predanu 1 m^3 fluida. Visina na ulazu i izlazu iz pumpe određena je Pitotovom cijevi postavljenoj u sredini ulazne, odnosno izlazne cijevi iz pumpe. Razlika tih visina određuje dobavnu visinu pumpe. Specijalan slučaj kada je $d_{ul}=d_{izl}$ i $z_{ul}=z_{izl}$ tada je dobavna visina pumpe:

$$H = \Delta p / \rho g$$

U ovom slučaju visina pumpe izražena je povećanjem tlačne visine prolaskom kroz pumpu koja je proporcionalna korisnoj snazi predanoj fluidu.

Snaga pumpe i ukupna djelotvornost pumpe

Za provedbu procesa zanima nas korisna (efektivna) snaga pumpe, P_{ef} . Pod korisnom snagom se podrazumijeva korisno predanu energiju fluidu u 1 s.

$$P_t = \dot{V}_t \cdot \rho \cdot (W_m)_t \quad [J/s]$$

Snaga potrebna za pogon pumpe veća je od korisne snage za gubitke energije. Gubici su izraženi ukupnom djelotvornošću pumpe, η . Ukupna djelotvornost pumpe ili ventilatora predstavlja omjer korisne snage spram stvarno utrošene od strane pogonskog stroja.

$$P_{ef} = \frac{P_t}{\eta} \quad \eta < 1$$

Za idealne kapljevine:

$$\text{Teoretski rad: } W_t = m_t \cdot g \cdot H_t \quad [J]$$

$$P_t = \dot{m}_t \cdot \underbrace{g \cdot H_t}_{(W_m)_t} \quad [J/s]$$

Realni uvjeti – prisutni su gubici koji su uključeni u ukupnu djelotvornost pumpe, η_p

Na ukupnu djelotvornost utječe niz faktora vezanih uz iskoristivost, \dot{V} , P , W .

Ukupna djelotvornost uzima u obzir tri vrste gubitaka:

- ☞ hidrauličke
- ☞ volumetrijske
- ☞ mehaničke

Ukupan stupanj djelovanja (djelotvornost) dan je izrazom: $\eta = \eta_H \cdot \eta_M \cdot \eta_V$

Hidraulička djelotvornost (manometarska)

$$\eta_H = \frac{H_m}{H_t} = \frac{\text{ostvarenavisinadobave(mjeraenergije)}}{\text{teoretskavisinadobave(ulozenaenergija)}} \quad \eta_H = \frac{H_m}{H_t} = \frac{W}{W_t}$$

$H_m < H_t$ umanjeno zbog otpora same pumpe (trenje kapljevine u pumpi i promjena smjera gibanja kapljevine)

Manometarska visina: je mjera za energiju potrebnu da se kapljevina transportira s visine z_1 na z_2 , da se savladaju razlike tlakova koji vladaju u spremnicima 1 i 2, razlika kinetičke energije i gubici energije zbog mehaničkog trenja.

$$H_m = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_w \quad [m]$$

Volumetrijska djelotvornost

$$\eta_v = \frac{\dot{V}}{\dot{V}_t} = \frac{\text{kapljevina koja stvarno odlazi u tlačni vod}}{\text{kapljevina koja prolazi kroz pumpu}} \quad \eta_v = \frac{\dot{V}}{\dot{V} + \dot{V}_g}$$

\dot{V}_g – gubici

Volumetrijski gubitci nastaju zbog:

- ✓ neidealnost brtvljenja
- ✓ zbog konstrukcijskih nedostataka dolazi do kašnjenje u fazi rada
- ✓ kapljevine se zadržava u pumpi (mrtvi prostori) ili se vraća u nasisni vod
- ✓ apsorpciji zraka u tekućini

Mehanička djelotvornost

$$\eta_M = \frac{P_t}{P_{ef}}$$

$P_{ef} > P_t$ zbog gubitaka uzrokovanih mehaničkim trenjem u ležajevima te kao posljedica mehaničkog trenja dijelova pumpe koji se nalaze u zahvatu.

Ukupna djelotvornost pumpe

Predstavlja omjer korisne izlazne snage isporučene pumpom (hidraulička snaga) prema ulaznoj snazi koju isporučuje motor.

Ukupan stupanj djelovanja (djelotvornost) umnožak je sve tri djelotvornosti:

$$\eta = \eta_H \cdot \eta_M \cdot \eta_V$$

$$P_t = \dot{V}_t \cdot \rho \cdot (W_m)_t$$

$$P_{ef} \cdot \eta_M = \frac{\dot{V}}{\eta_v} \cdot \rho \cdot \frac{W_m}{\eta_H}$$

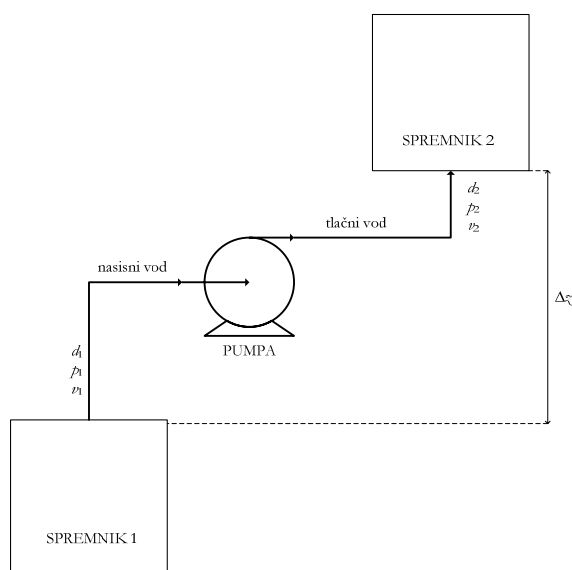
$$P_{ef} = \frac{W_m \cdot \rho \cdot \dot{V}}{\eta_v \cdot \eta_H \cdot \eta_M} = \frac{W_m \cdot \rho \cdot \dot{V}}{\eta}$$

Specifični rad pumpe

Specifični rad potreban za transport kapljevine izračunava se na temelju Bernoullijeve jednadžbe:

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + W_m = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + h_w \cdot g [J / kg]$$

$$W_m = (z_2 - z_1) \cdot g + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + h_w \cdot g$$



Slika 47. Pumpno postrojenje

Osnovni problem pri izračunavanju W_m je procijeniti Δp cjevovoda, dok su ostali članovi lako izmjerljivi.

Radne karakteristike pumpe

Uz svaku pumpu proizvođač prilaže radnu karakteristiku pumpe. Na osnovi tih karakteristika određuje se namjena pumpe. Radna karakteristika pumpe određuje se pri konstantnoj brzini rotacije, prigušivanjem izlaza mijenja se protok, a pri tome se mjeri:

- ✓ protok,
- ✓ porast tlaka kroz pumpu, Δp i
- ✓ efektivna pogonska snaga, P_{eff} .

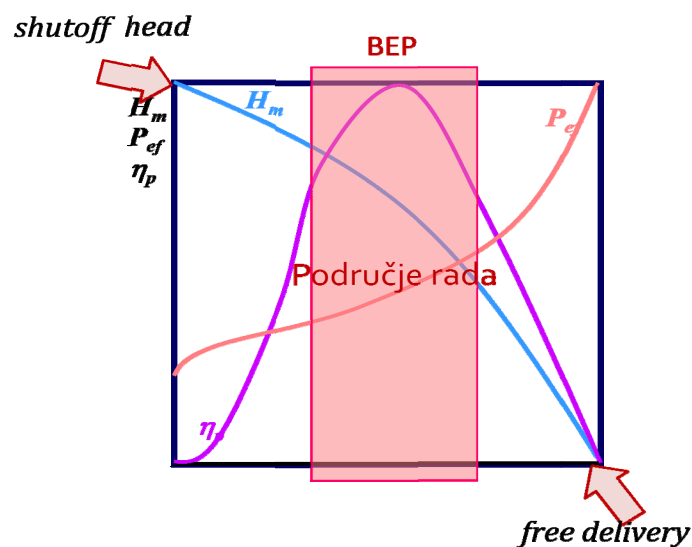
Porast tlaka preračuna se u visinu stupca fluida (visina dobave):

$$H_m = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_w$$

Pri mjerenju radne karakteristike pumpe razlika u potencijalnoj, kinetičkoj energiji, kao i gubici iznose 0. Visina dobave predstavlja tlačnu energiju koju pumpa predaje fluidu:

$$H_m = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_w \quad H_m = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g}$$

Dobivene vrijednosti prikazuju se grafički – na osi x prikazuje se volumni protok, a na osi y efektivna snaga, visina dobave i djelotvornost rada pumpe. Grafa služi za određivanje radnog područja pumpe.



Slika 48. Radna karakteristika pumpe

Na grafu se mogu uočiti dvije granične točke:

- ✓ *free delivery*
- ✓ *shutoff head*.

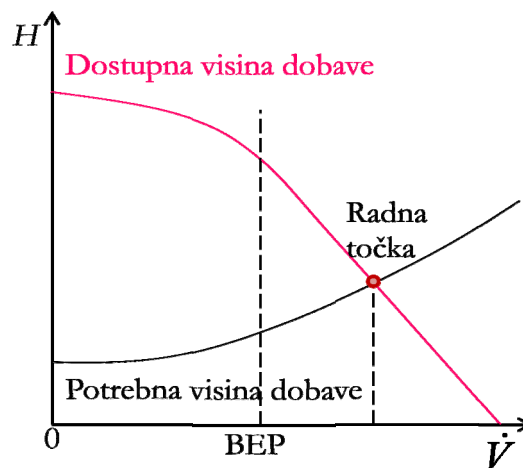
Pri maksimalnom protoku kroz pumpu, visina dobave jednaka je 0 – eng. naziv *free delivery*.

Djelotvornost pumpe je 0 – nema korisnog rada.

Kada je volumni protok 0, visina dobave je maksimalna, eng. *shutoff head*- kako je izlaz iz pumpe blokiran djelotvornost je 0 – nema korisnog rada. Negdje između ova dva krajnja slučaja nalazi se optimalno područje rada sa točkom u kojoj je djelotvornost rada pumpe maksimalna (*best efficiency point* – BEP). U stacionarnim uvjetima pumpa može raditi samo po prikazanim krivuljama.

Radna točka sustava

Radna točka pumpe pri transportu neke kapljevine kroz cjevovod ovisi o radnim karakteristikama pumpe i potrebnoj visini dobave za transport kapljevine u cjevovodu. Postiže se pri volumnom protoku koji odgovara sjecištu krivulja potrebne visine dobave za određenu pumpu i potrebne visine dobave u sustavu. Točka gdje se sijeku dobavna visina sustava i pumpe biti će radna točka, ona definira protok i tlak na kojem će pumpa raditi. Ukoliko želimo li promijeniti radnu točku možemo to učiniti prigušivanjem, promjenom broja okretaja pumpe ili oboje. Prigušivanjem se radna točka pomiče ulijevo, dok se promjenom broja okretaja mijenja krivulja potrebne visine dobave što utječe i na radnu točku. Prigušivanjem se gubi i dio energije pa taj način regulacije treba izbjegavati



Slika 49. Način određivanja radne točke pumpe

Potrebna visina dobave definirana je za cjevovod od ulaza u cijevi (točka 1) do točke 2 na izlazu

$$\text{iz cijevi : } H_{req} = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_w$$

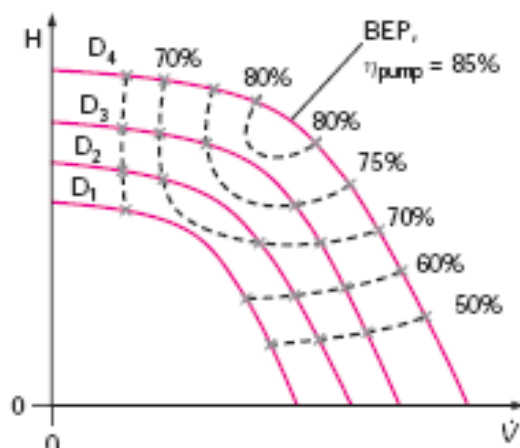
Univerzalna radna karakteristika

Uobičajeno je da proizvođač ponudi nekoliko veličina promjera impelera (rotora) čije se radne karakteristike prikazuju na univerzalnom grafu. Ovo omogućuje ponovnu upotrebu iste opreme za različite namjene.

Na taj način se:

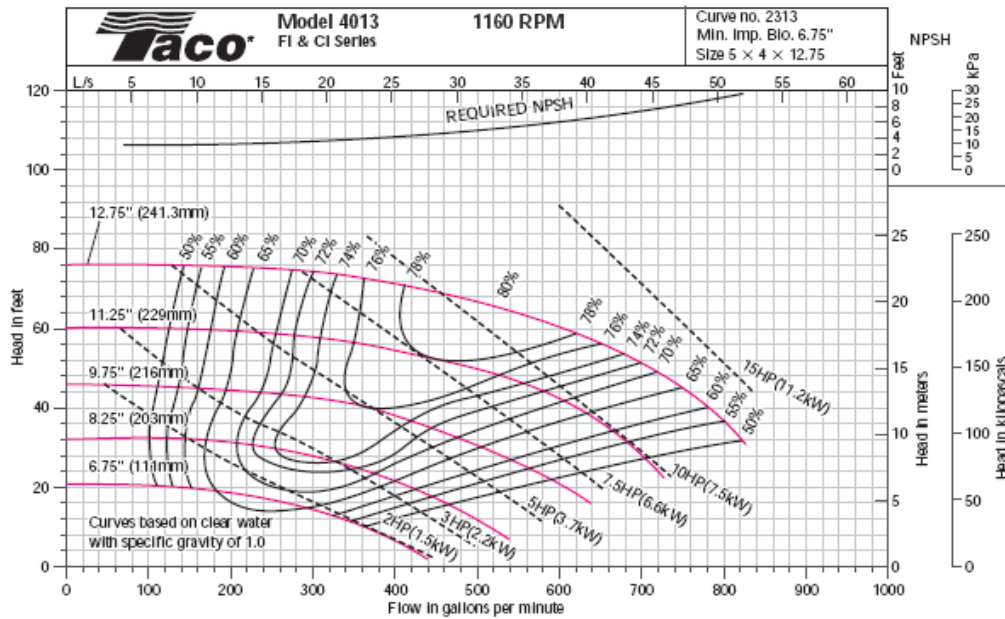
- ✓ Ostvaruje ušteda na troškovima proizvodnje
- ✓ Povećava kapacitet s promjenom rotora

$H=f(V)$ provlače se linije koje spajaju točke iste djelotvornosti).



Slika 50. Univerzalna radna karakteristika

Za različit broj okretaja ili različite promjere impelera u istoj pumpi, ostvaruje se ista djelotvornost kako je prikazano na grafu.



Slika 51. Primjer radne karakteristike centrifugalne pumpe sa različitim veličinom impelera

Iz slike je vidljivo da pumpa sa većim impelerom postiže veću djelotvornost. Postavlja se pitanje zašto se rade pumpe sa manjim impelerom. Naime, potrebno je zadovoljiti zahtjeve koji su često kombinacija definiranog protoka i visine dobave što rezultira izborom pumpe s nižom djelotvornosti.

NPSH karakteristika

Eng. Netto Positive Suction Head

Neto pozitivna visina usisa – svojstvena je centrifugalnoj pumpi

NPSH predstavlja razliku tlaka u točki osi pumpe na usisnoj prirubnici i tlaka para kapljevine na radnoj temperaturi.

Vrlo je važna karakteristika centrifugalne pumpe, posebno u slučajevima kada se transportiraju lako hlapljive kapljevine ili kapljevine na povišenim temperaturama, ukoliko su u kapljevini otopljeni plinovi ili kod transporta vrlo viskoznih kapljevina.

$$NPSH = z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho \cdot g} - \frac{p_v}{\rho \cdot g} - \frac{\Delta p_{tr}}{\rho \cdot g}$$

Gdje je:

z – razlika geodetskih visina spremnika i osi pumpe (ukoliko je spremnik iznad osi pumpe, z je pozitivan)

p – tlak u spremniku (na ulazu u pumpu)

p_v – tlak kapljevine na radnoj temperaturi

Δp_{tr} – pad tlaka u nasisnom vodu, zbog viskoznog trenja i mjesnih otpora

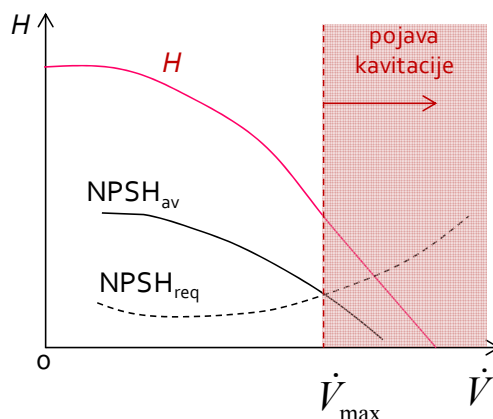
- kinetička energija kapljevine u nasisnom vodu (često se zanemaruje zbog male vrijednosti)

Razlikuje se:

$NPSH_{av}$ – raspoloživa (*available*)

$NPSH_r$ – potrebna (*required*)

Za nesmetani rad potrebno je da $NPSH_{av} > NPSH_{req}$. U protivnom može doći do pojave kavitacije, ili pumpa uopće ne može ostvariti transport.



Slika 52. Uvjeti pri kojima dolazi do kavitacije

Kavitacija

Prvi znanstvenik koji je proučavao kavitaciju bio je John Rayleigh, krajem 19. stoljeća. On je uočio pojavu kavitacije kod toka vode u rijekama, posebno ispod vodopada gdje voda zbog ove pojave izaziva znatnu eroziju u kamenju na koje pada.

Negativni učinci kavitacije:

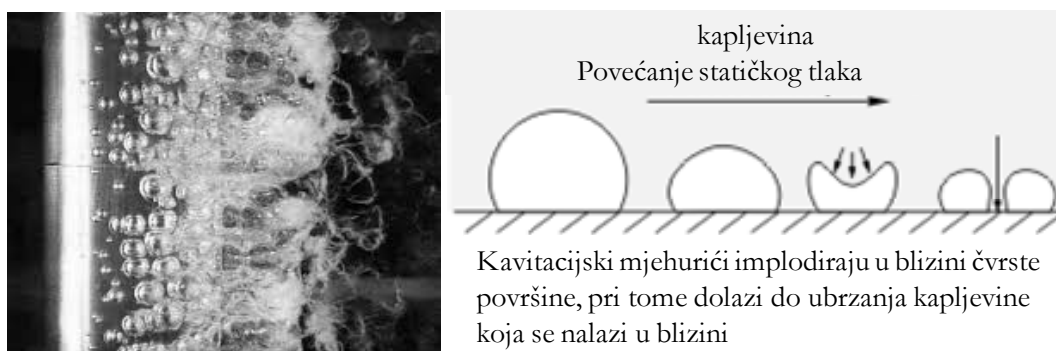
- ✓ Kavitacijska erozija
- ✓ Nagli pad snage zbog smanjenja gustoće radnog fluida (dvofazni fluid; voda + para)
- ✓ Niži stupanj iskorištenja uređaja
- ✓ Vibracije

Kavitacija je pojava isparavanja kapljevine i stvaranja mjehura pare. Zbog velikih brzina, često se pojavljuje na lopaticama pumpi i vodenih turbina, može se pojaviti i na hidrauličkim sustavima aviona (na velikim visinama zbog velikog pada hidrostatičkog tlaka). Nastaje u trenutku kada tlak kapljevine postaje jednak ili manji od tlaka zasićenja pare. Kavitacija se događa u području gdje je tlak niži od tlaka para kapljevine, npr. na mjestu usisa u pumpu ili općenito na mjestima gdje dolazi do velikog sniženja tlaka. Do tog sniženja dolazi radi zakona očuvanja energije, a na mjestima povećanja kinetičke energije kapljevine (mjestimična suženja).



Slika 53. Područja pojave kavitacije

U trenutku smanjenja tlaka ispod kritične vrijednosti, dolazi do hladnog ključanja kapljevine, stvaraju se mjehurići pare u struji kapljevine. U početku se pojavljuju mali mjehurići plina koji se sjedinjuju i tvore veće šupljine ("caverne"). Zbog toga je narušena homogenost i kontinuitet kapljevite faze, te za to područje ne vrijede više osnovne jednadžbe strujanja nestlačivog fluida. Mješavina kapljevine i pare dolazi do mjesta proširenja kada se brzina strujanja smanjuje, a tlak ponovno raste. Para se pri tome trenutačno kondenzira, a kako je volumen kondenzata oko 1 000 puta manji od volumena pare, na određenim mjestima nastaje vakuum. Nadolazeća kapljevina dobiva ogromno ubrzanje kojim udara u stjenke uređaja.



Slika 54. Nastanak i implozija kavitacijskih mjehurića

Kavitaciju je neophodno izbjeći ili kontrolirati jer se prilikom implozivnog raspada kavitacijskih mjehurića oslobađa velika količina energije uz buku (vibracije i jaki šumovi) i moguća oštećenja na površini opreme (pumpe i ventili) – kavitacijska erozija. Kavitacijska oštećenja nastaju na: pumpama, ventilima, cijevima, propelerima...



Slika 55. Oštećenja uzrokovana kavitacijom

Ako na nekom mjestu u strujnom toku dolazi do suženja, apsolutni tlak tekućine opada s kvadratom brzine (Bernoullieva jednadžba).

$$z_1 = z_2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \quad \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

VRSTE PUMPI

Pumpe se dijele na više načina, ali ta se podjela razlikuje ovisno o literaturi.

Mogu se podijeliti:

- prema namjeni
- prema dobavi - mogu biti pumpe male dobavne količine ili velike dobavne količine
- prema izvedbi - mogu biti pumpe s pravocrtanim gibanjem kao što su stapne i klipne pumpe ili pumpe s rotacijskim gibanjem kao centrifugalne, vijčane i zupčaste, a posebna su izvedba mlazne pumpe
- prema dobavnoj visini - mogu biti sisaljke s malom i velikom visinom dobave

Prema principu djelovanja pumpe se dijele se u tri grupe:

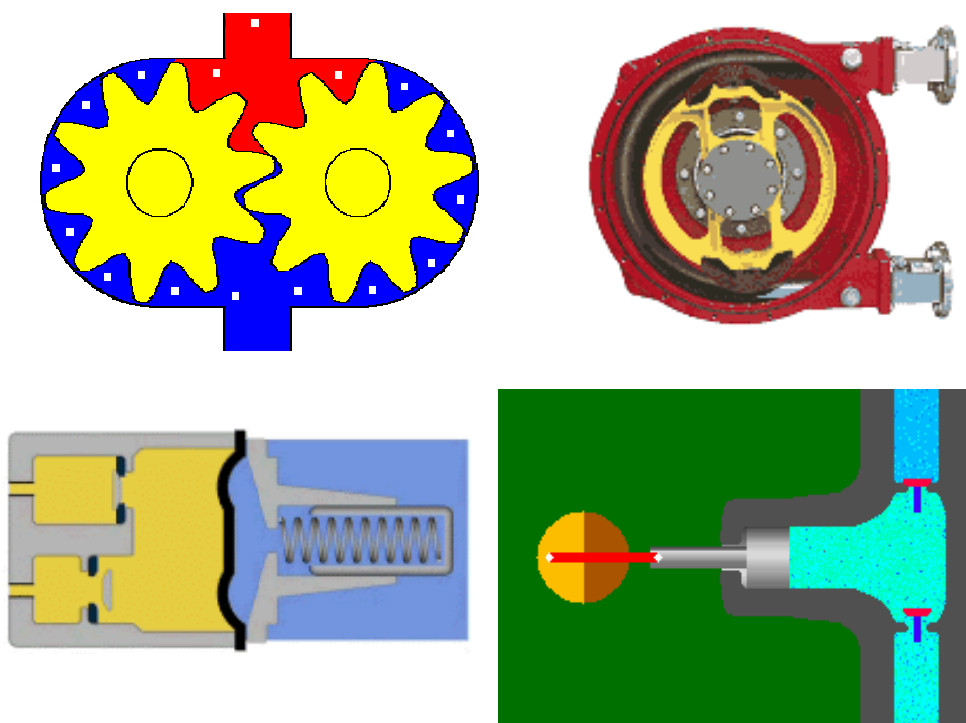
– Klipni strojevi;

- Rotacijski strojevi
- Dinamičke pumpe

Klipni i rotacijski strojevi često se objedinjuju u grupu tzv. **volumenskih strojeva**, a lopatični se često nazivaju i **turbostrojevi**.

Kod dinamičkih pumpi kapljevina se transportira djelovanjem sila koje se na nju prenose u prostoru (kućištu) koje je neprekidno povezano s usisnim i tlačnim cjevovodom. U volumenskim kapljevina se prenosi pomoću periodičkih promjena volumena prostora koji zauzima kapljevina, a koji se naizmjenično povezuje s usisnim tlačnim cjevovodom.

Zajednička im je karakteristika da se kapljevina se usisava stvaranjem potlaka pomoću radnog dijela u kućištu pumpe.



Slika 56. Primjeri volumenskih pumpi a) zupčasta, b) perilstatička, c) membranska i d) klipna

Brojne su prednosti volumenskih pumpi ispred dinamičkih:

- ✓ bolje su za smično osjetljive kapljevine zbog manjeg smično naprezanja koje nastaje unutar volumenskih pumpi,
- ✓ samonasisne su jer stvaraju dovoljan podtlak i u radu naprazno,
- ✓ broj okretaja rotora manji je za iste kapacitete od dinamičkih pumpi što im produžava trajanje,
- ✓ osnovna prednost su manji gubici pri radu u usporedbi sa dinamičkim pumpama jer nema pretvorbe energije kao u slučaju rotacijskih pumpi.

Postoje i nedostaci:

- ✓ ne mogu mijenjati protok bez promjene rotacije,
- ✓ zbog stvaranja velikog tlaka na izlazu moguće je oštećenje pumpe ili pregrijavanje elektromotora ukoliko se prostor na izlazu blokira – potrebna je zaštita u slučaju natanka visokog tlaka,
- ✓ zbog svoje izvedbe stvara pulzirajući tok što često predstavlja problem – radi jednoličnijeg protoka koriste se dvoradne pumpe.

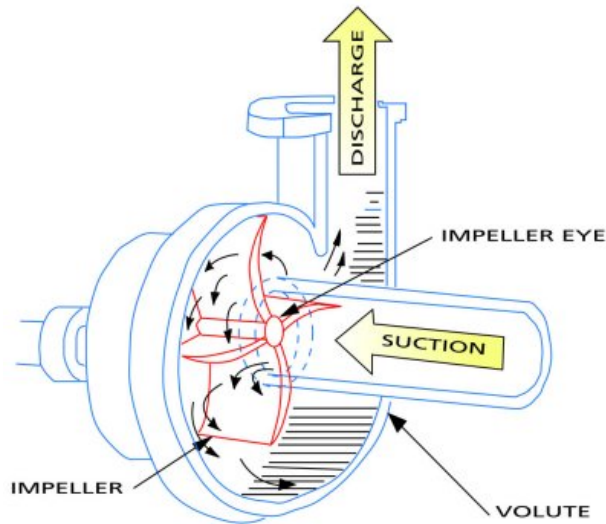
U praksi najzastupljenija dinamička pumpa je centrifugalna pumpa, koristi se u gotovo 80% slučajeva.

Prednosti centrifugalne pume:

- ✓ lagana
- ✓ lako prenosiva
- ✓ kontinuirana dobava (protok)
- ✓ nema ventila
- ✓ jeftina i jednostavna

Nedostaci

- ✓ nije samonasisna
- ✓ ne ostvaruje visoke tlakove (zbog toga se koriste višestupnjevite centrifugalne pumpe)
- ✓ zbog pretvorbe kinetičke energije u tlačnu ima nižu ukupnu djelotvornost
- ✓ nije dozirna pumpa
- ✓ nije prikladna za suspenzije i viskoznije kapljevine
- ✓ eksplozivno ugroženi prostori, potreban elektromotorni pogon



Slika 57. Shematski prikaz centrifugalne pumpe

https://www.google.hr/search?q=centrifugalna+pumpa&biw=1242&bih=545&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwig1oPZ4vrNAhXHkSwKHcnnDxgQ_AUIBigB#tbm=isch&q=centrifugal+pump&imgsrc=xUI2JqduM8hmwM%3A

Princip rada centrifugalne pumpe

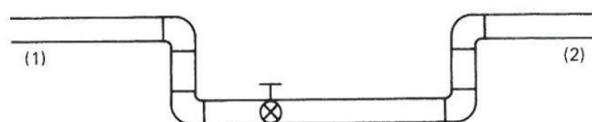
Centrifugalna pumpa se sastoji od spiralnog kućišta i rotora pričvršćenog na vratilu koji se vrti velikom brzinom. Kako centrifugalna pumpa nije samonasisna, da bi postigla potreban podtlak u kućištu i povukla kapljevину iz spremnika, mora biti potopljena kapljevinom koju transportira. Kada se rotor vrti potiskuje kapljevину koja se nalazi između lopatica, a djelovanjem centrifugalne sile kapljevina povećava brzinu koja se dobrim dijelom pretvara u tlačnu energiju. Zbog nastalog podtlaka kapljevina iz spremnika ulazi kroz centralno smješten nasisni vod. Kapljevini koja se kreće u prostoru između rotora i kućišta mijenja se kinetička energija, budući da je oblik kanala unutar kućišta tako izveden da pridonosi promjeni tlaka i brzine strujanja kapljevine kroz pumpu (rotor je smješten acentralno u kućištu). Na izlasku iz pumpe, kapljevina ima povećanu potencijalnu energiju na račun smanjenja kinetičke energije.

Princip rada centrifugalne pumpe osigurava kontinuiran protok kapljevine kroz kućište, s konstantnim tlakom i protokom, sve dotle dok brzina i otpori ostaju u dopuštenim granicama. Uz ispunjenje navedenih uvjeta moguće je postići veliku dobavu uz relativno male dimenzije pumpe.

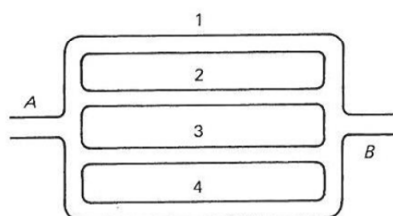
Link – princip rada centrifugalne pumpe: <https://www.youtube.com/watch?v=BAnnTLpros>

PROTJECANJE KROZ SLOŽENI CJEVOVOD

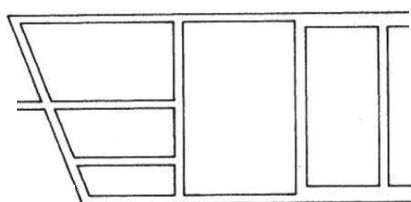
Složeni cjevovod je razgranati snop cijevi, različitih promjera i dužina s ugrađenim armaturama. Cjevovod – može biti spojen serijski, paralelno ili je moguća kombinacija serijski i paralelno spojenih cijevi.



Serijski spojen cjevovod



Paralelno spojen cjevovod



Kombinacija serijski i paralelno spojenog cjevovoda

Slika 58. Način spajanja složenih cjevovoda

Sustavi cjevovoda imaju čestu primjenu u praksi:

- ✓ Distribucija vode u gradovima
- ✓ U industrijskim objektima – paralelni i serijski spojevi
- ✓ Tankeri

Posao inženjera je da projektira sustav cijevi koji će omogućiti dopremu određene količine fluida, pri određenom tlaku i uz minimalne investicijske troškove i troškove održavanja. Složeni cjevovod obično uključuje veći broj serijski, paralelno spojenih cijevi ili kombinacijom za koje je potrebno proračunati pad tlak, protoke. Primjena računala ovaj složeni posao (uz brojne iteracije) znatno pojednostavljuje.



Slika 59. Primjer složenog cjevovoda

Cjevovod u seriji

Kada su dvije ili više cijevi različitog promjera ili različite hrapavosti spojene u slijedu jedna iza druge, kažemo da su cijevi spojene serijski. Za proračun se koriste jednadžba zakona očuvanja mase za nekompresibilne fluide i zakon očuvanja energije:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_3$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_w$$

Fluid prolazi kroz sve cijevi istim protokom ali zbog razlike u promjeru cijevi ne i istom brzinom. Ukupni pad tlaka jednak je sumi gubitaka u svakoj pojedinoj cijevi koji nastaju zbog protjecanja u cijevi i kroz armature.

$$\Delta p_{uk} = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3$$

Ako pad tlaka izrazimo u metrima dobiva se izraz za ukupni gubitak izražen u metrima:

$$h_{uk} = \sum_{i=1}^m \xi \frac{\ell_i \cdot v_i^2}{2 \cdot D_i \cdot g} + \sum_{j=1}^n \zeta_j \frac{v_j^2}{2 \cdot g}$$

Kako za serijski spojen cjevovod vrijedi zakon očuvanja mase (za nekomresibilne fluide volumni

protok – konstantan): $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_3$

Kako je praktičnije je za izračun ukupnih gubitaka u cjevovodu koristiti volumni protok umjesto brzine, dobiva se slijedeći izraz:

$$h_{uk} = \sum_{i=1}^m \xi \frac{8 \cdot \ell_i \cdot \dot{V}_i^2}{g \cdot \pi \cdot D_i^5} + \sum_{j=1}^n \zeta_j \frac{8 \cdot \dot{V}_j^2}{g \cdot \pi \cdot D_j^5}$$

Metoda proračuna

Metoda proračuna ukupnog pada tlaka ovisi o poznatim podacima. Metoda proračuna – ovisi o poznatim podacima. Poznato je da vrijedi: $W_{A-B} = W_1 = W_2 = W_3$.

Problem 1 – nepoznati protok:

Ukoliko je pad tlaka poznat, izračuna se volumni protok za svaku paralelno spojenu cijev, a zatim ukupni protok.

Problem 2 – nepoznati pad tlaka:

Ukoliko je poznat ukupni protok, ali su nepoznati protoci u pojedinim granama kao i pad tlaka, potrebno je:

- ✓ Pretpostaviti protok kroz jednu cijev i izračunati pad tlaka kroz nju
- ✓ Kako je pad tlaka isti u svim paralelno spojenim granama, rezultat se koristi za: proračun protoka kroz ostale grane.
- ✓ Zbrojiti dobiveni protok za ukupni protok, usporediti s zadanim protokom.

Raditi linearne korekcije do točnog rezultata (ponavljati prethodne korake).

Mreža cjevovoda

Metoda rješavanja mreže cjevovoda ovisit će o poznatim podacima. U tablici su prikazana 3 moguća problema.

metode	Poznati podaci	Rješenje	Način rješavanja
I	\dot{V} , l , d , v , e	H_m, Dp	Direktno
II	H_m, Dp, l, d, v, e	\dot{V}	Iteracijom
III	H, Dp, l, v, e	d	Iteracijom

Analiza mreže cijevi – općenito

Proračunu mreže cijevi bez obzira na složenost, bazira se na slijedećem:

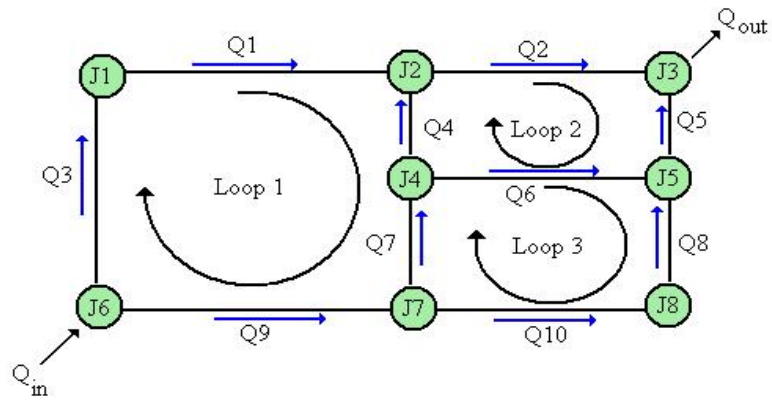
Zakon očuvanja mase mora biti zadovoljen.

Volumni protok je nepromijenjen prije i poslije račvanja (paralelni tok).

Volumni protok je nepromijenjen za cijevi spojene u seriju, bez obzira na promjenu promjera cijevi.

Pad tlaka je isti u točkama račvanja za sve paralelno postavljene cijevi.

Praktična primjena: ukupni pad tlaka u krugu je 0 (+ u smjeru kazaljke na satu, - u suprotnom smjeru).



Slika 60.

DINAMIKA STLAČIVIH FLUIDA

Dinamika stlačivih fluida proučava strujanje stlačivih fluida – plinova. U dosadašnjim razmatranjima govorilo se o nestlačivim fluidima, odnosno kapljevinama. Plinovi se mogu smatrati nekompresibilnima i sa mikroskopskog i makroskopskog gledišta ukoliko promjena tlaka nije veća od 20%. U tim uvjetima vrijede korelacije za nekompresibilni tok (proračun za faktor trenja, Re broj, pad tlaka). Kompresibilni tok je važan pri strujanju plinova velikim brzinama kroz cijev, kroz mlaznice, u turbinama ili u sigurnosnim ventilima.. Kompresibilni (stlačivi) tok odnosi se na tok fluida čija se gustoća znatnije mijenja ovisno o uvjetima. Stlačivim fluidima gustoća se mijenja s promjenom tlaka i temperature. Do ove promjene dolazi u uređajima kojima struje plinovi velikim brzinama. Pri proučavanju potrebno je znanje dinamike fluida i termodinmike. Zbog jednostavnosti proučavanja se temelje na ponašanju savršenog plina. Kada kompresibilni fluidi (plinovi) protječu iz područja višeg prema nižem tlaku dolazi do ekspanzije plina pri tome se mijenja gustoća plina. Promjenu gustoće potrebno je uzeti u proračun. Pri protjecanju kroz cijev konstantnog poprečnog presjeka, zbog smanjenja gustoće dolazi do povećanja brzine kako bi maseni protok ostao konstantan. Posljedica je povećanje kinetičke energije plina.

Savršeni plin

Savršeni plin je tvar koja se ponaša u skladu s jednadžbom stanja:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \text{ili} \quad p = \rho \cdot R \cdot T$$

Jednadžba stanja se koristi u ovom obliku jer je zbog stlačivosti plina mjerodavna veličina maseni protok, odnosno gustoća.

U tehničkoj primjeni se mnogi plinovi mogu smatrati savršenim ukoliko se nalaze:

- ✓ ispod kritičnog tlaka
- ✓ iznad kritične temperature
- ✓ Savršeni plin se ne može poistovjetiti s idealnim fluidom, budući da u idealnom fluidu ne postoje smična naprezanja.
- ✓ Savršeni plin je viskoznan i definiran je jednadžbom stanja.
- ✓ Pri analizi stlačivog strujanja plinova, mora se uzeti u obzir apsolutni tlak koji ulazi u jednadžbu stanja.
- ✓ Toplinsko i kalorično savršen plin prati jednadžbu stanja i ima konstantne vrijednosti specifičnih toplina, c_v i c_p (pri konstantnoj T).

Realni plinovi odstupaju više od toplinske i kalorične vrijednosti nego od jednadžbe stanja.

Zakoni očuvanjaZakon očuvanja mase

Pri razmatranju nestlačivih fluida u kolegiju Prijenos tvari i energije govorilo se o zakonu očuvanja mase koji u slučaju izotermnog strujanja glasi: $\dot{V} = konst.$

Zbog promjenjive gustoće zakon očuvanja mase za kompresibilne fluide glasi:

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot v \cdot A = konst$$

Zakon očuvanja količine gibanja

Rezultanta svih sila koje djeluju na cijelu masu fluida izražena je jednadžbom količine gibanja individualnog volumena koja uzima u obzir sve sile koje djeluju u sustavu (vanjske i unutarnje):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \vec{v} \cdot \rho \cdot dV = \int_{V(t)} \vec{a} \cdot \rho \cdot dV + \int_{S(t)} \vec{\sigma} \cdot dS$$

Kod strujanja plinova se masene sile zbog male gustoće često zanemaruju, pa iz jednadžbe gibanja i energetske jednadžbe otpada član koji izražava taj utjecaj. Potrebno ih je uzeti u obzir pri strujanjima velikih masa plinova (npr. u meteorologiji).

Zakon očuvanja energije

Razmotrimo fluid koji struji u stacionarnim uvjetima od točke 1 do točke 2. Ukupna energija po jedinici mase dana je izrazom (zbroj unutrašnje, potencijalne, tlačne i kinetičke energije izražena po jedinici mase):

$$E = U + z \cdot g + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

Neka je između tih točaka fluidu dodana neka količina topline i neka količina rada napravljena na njemu. Energetska bilanca može se izraziti jednadžbom: $E_1 + Q + W = E_2$

odnosno:

$$(U_2 - U_1) + (z_2 - z_1) \cdot g + (p_2 \cdot V_{m2} - p_1 \cdot V_{m1}) + \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2} = Q + W *$$

Kako je entalpija po jediničnoj masi fluida definirana: $H = U + p \cdot V$

Kada se kombiniraju može se zakon očuvanja energije izraziti i ovako:

$$(H_2 - H_1) + (z_2 - z_1) \cdot g + \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2} = Q + W **$$

Rad je pozitivan kad pumpa ili kompresor predaje energiju fluidu (rad se obavlja na fluidu), a negativan kada fluid predaje energiju u turbini (fluid obavlja mehanički rad).

Energetska jednačba u diferencijalnom obliku:

$$dU + g \cdot dz + pdV + Vdp + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dQ + dW \quad ***$$

U slučaju reverzibilnih promjena, 1. zakon termodinamike može se izraziti:

$$dQ = dU + pdV$$

Gdje je:

dQ - izmijenjena toplina

dW – rad predan fluidu

dU – povećanje unutrašnje energije

$p \cdot dV_m$ – rad uslijed promjene volumena

$dH = dU + d(p \cdot V_m)$ promjena entalpije

U realnim sustavima, potrebno je uzeti u obzir viskozno trenje zbog kojeg dolazi do generiranja topline (prelazak mehaničke u toplinsku energiju).

$$dQ = dU + pdV - dF$$

Gdje je F energija po jedinici mase potrebna da se savlada trenje:

$$dQ + d(h_w \cdot g) = dU + p \cdot dV_m$$

Uvrštenjem prethodne jednačbe u jednačbu ***, dobiva se diferencijalni izraz:

$$g \cdot dz + V_m \cdot dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + d(h_w \cdot g) = dW$$

Ova jednačba se može integrirati od stanja 1 do stanja 2:

$$(z_2 - z_1) \cdot g + \int_{p_1}^{p_2} V_m \cdot dp + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + h_w \cdot g = W_{1-2} \quad ****$$

Jednačbama *, ** i **** se izražava promjena energije za stacionarno, turbulentno strujanje fluida.

Kod stlačivog strujanja zbog stalne promjene srednje brzine (v), pogodnije je koristiti maseni protok (\dot{m}) ili maseni fluks (\dot{m}_A).

$$\dot{m}_A = v \cdot \rho = \frac{v}{V_m}$$

Množenjem jednačbe **** s ρ^2 ili $\frac{1}{V_m^2}$ i integriranjem:

$$\int_1^2 \rho^2 \cdot g \cdot dz + \int_1^2 \rho \cdot dp + m_A^2 \cdot \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{m_A^2}{2} = \int_1^2 \rho^2 \cdot dW$$

Pretpostavlja se da faktor trenja konstantan (Re je vrlo visok – u području u kojem ne utječe na faktor trenja. Odnosi između ρ (ili V_m), p i T dani su jednadžbom stanja.

Izotermno strujanje savršenog plina u horizontalnoj cijevi

Promatra se stacionarni tok plina između presjeka 1 i 2 kroz horizontalnu cijev duljine L te je odnos energije u sustavu dan je jednadžbom:

$$\int_1^2 \rho^2 \cdot g \cdot dz + \int_1^2 \rho \cdot dp + m_A^2 \cdot \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{m_A^2}{2} = \int_1^2 \rho^2 \cdot dW .$$

Uz uvjet da nema dovođenja rada između promatranih točaka 1 i 2 (promjena potencijalne energije je 0)

$$dW=0$$

$$z_1 = z_2$$

$$\text{gornji izraz se pojednostavljuje: } \int_1^2 \rho \cdot dp + \dot{m}_A^2 \cdot \left[\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + \xi \cdot \frac{l}{2 \cdot d} \right] = 0$$

Uz izotermne uvjete vrijedi:

$$p \cdot V_m = \underbrace{p_1 V_{m1}}_{\text{početni uvjeti}} \quad \text{ili} \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho_1}$$

$$\text{Slijedi: } \rho = p \cdot \frac{\rho_1}{p_1}$$

Uvrštenjem u prvi član gornjeg izraza:

$$\frac{\rho_1}{p_1} \int_1^2 p \cdot dp = \frac{\rho_1}{p_1} \cdot \frac{p_2^2 - p_1^2}{2} = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2 p_1} \cdot \rho_1 = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2 p_2} \cdot \rho_2$$

Izraz za procjenu pada tlaka kod izoternog strujanja savršenog plina:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2 p_1} \cdot \rho_1 = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\dot{m}_A^2}{2} + \dot{m}_A^2 \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} .$$

LITERATURA:

Prof. dr.sc. Antun Glasnović, Interna skripta, Mehanika fluida.

Y. A. Çengel, J. M. Cimbala Fluid mechanics; Fundamentals and Applications , McGraw-Hill, New York, 2006 .

F.A. Holland, R. Bragg, Fluid Flow for Chemical Engineers, Edward Arnold, Hodder Headline PLC, London, 1995.

B. R. Munson, D. F. Young, T. K. Okiishi, Fundamentals of Fluid Mechanics, 5th Ed.,J. Wiley&Sons. Ltd., 2005.

Ž. Andreić, Temelji mehanike fluida, Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zagreb, 2014.