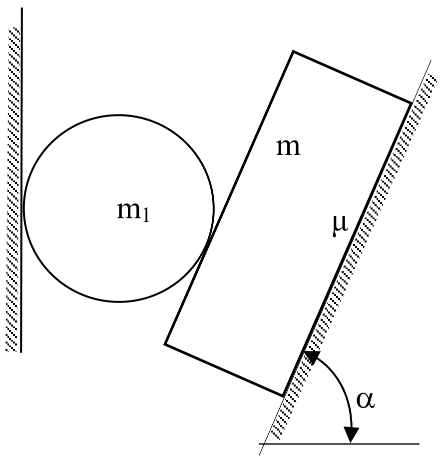
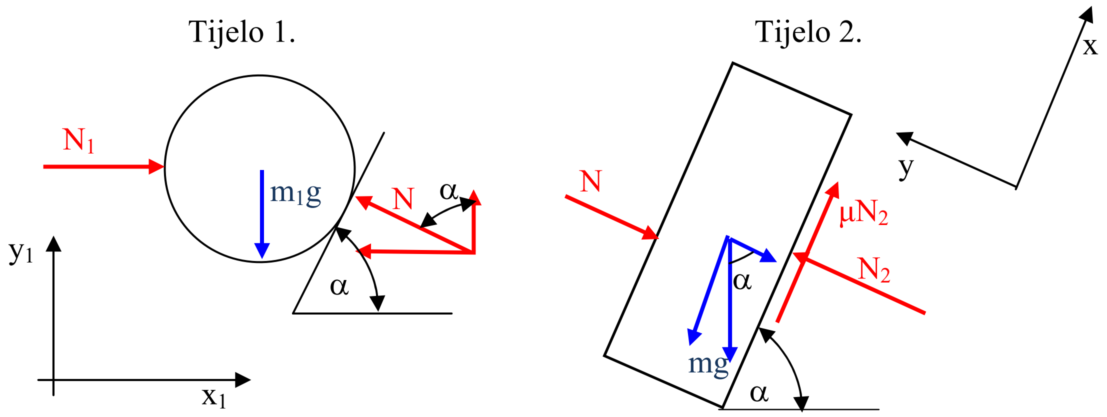
Zadatak 1. Valjak mase m_1 oslanja se na vertikalni zid s jedne strane, a s druge na blok mase m kojeg ujedno održava u stanju ravnoteže. Odredite iznos mase m_1 valjka da bi sustav bio u ravnoteži. Trenje između valjka i zida i valjka i bloka zanemarite! Zadano je: μ=0,18, m=2,2kg, α=50°.



Rješenje: rješavanje zadataka iz trenja ni po čemu se ne razlikuje od onoga objašnjenog u poglavlju o pravilu izolacije tj. oslobađanja tijela veza. Jedina razlika je u tome što će se ovdje pojaviti jedna nova sila, **sila trenja**, kojoj ćemo morati znati odrediti orijentaciju, što ćemo ovdje i naučiti.
Oslobodimo tijela veza!



Tijela su oslobođena veza na isti način kao i prije. Jeina razlika je u tome što se između bloka (tijelo mase m) i podloge pored normalne komponente reakcije pojavila još i tangencijalna komponenta sile μN_2 koju nazivamo silom trenja. Prema tekstu zadatka među u ostalim točkama dodira dvaju tijela kao i valjka (tijela 1.) s podlogom nema trenja.
Kako odrediti orijentaciju sile trenja, smjer i iznos smo već odredili**?**
Sila trenja će se suprotstavljati gibanju tijela koje bi nastupilo u slučaju neravnoteže, a stanje ravnoteže mora se zadržati.
U ovom zadatku u slučaju neravnoteže blok mase m počeo bi kliziti prema dolje, i ovdje ne postoji drugi mogući slučaj neravnoteže, što je u drugim zadacima moguće.
Krene li se blok mase m gibati prema dolje (a to se ne smije dogoditi) sila trenja će se tome htjeti suprotstaviti što znači da će vektor sile trenja morat biti orijentiran suprotno tom gibanju tj. bit će orijentiran prema gore kao što je to na slici prikazano.

Sada možemo pristupiti postavljanju uvjeta ravnoteže za svako tijelo posebno kako je već objašnjeno, ali prije toga treba uočiti dva koordinatna sustava.
Kod rješavanja zadataka na kosini uobičajeno je odabrati koordinatni sustav koji os x ima paralelnu s nagibom kosine a os y je naravno na nju okomita. tako je za tijelo 2. odabran koordinatni sustav Oxy. Za tijelo 1. odabran je koordinatni sustav Ox_1y_1 (horizontalno – vertikalno). To su dva različita koordinatna sustava pa moraju imati različito označene koordinatne osi. Odabir koordinatnog sustava Oxy kako je prikazano olakšava nam rješavanje zadatka jer moramo rastaviti na komponente samo jednu silu i to mg.
Postavimo sada uvjete ravnoteže za svako tijelo posebno:
<u>Tijelo 1.</u>

$$\sum F_{x1} = 0 \qquad N_1 - N \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{y1} = 0 \qquad N \cdot \cos\alpha - m_1 \cdot g = 0 \qquad (2)$$

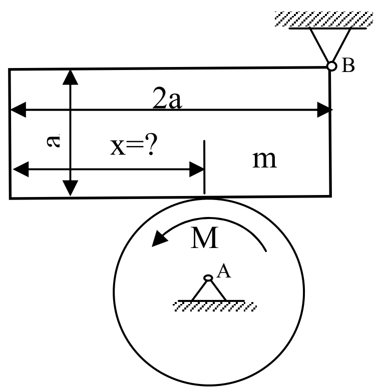
<u>Tijelo 2.</u>

$$\sum F_x = 0 \qquad \mu \cdot N_2 - m \cdot g \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

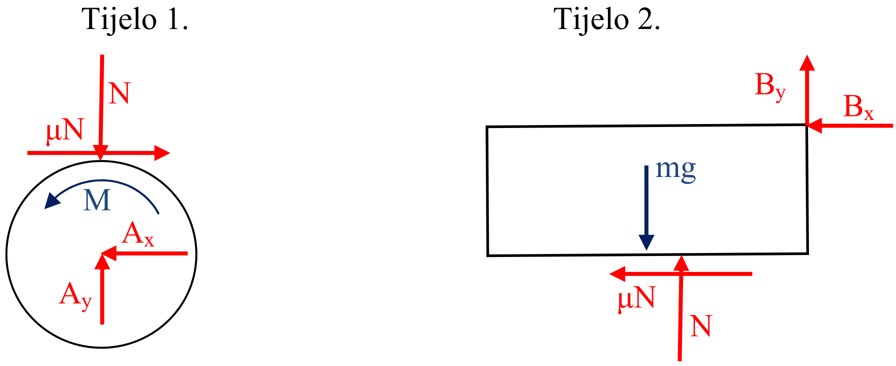
$$\sum F_y = 0 \qquad -N - m \cdot g \cdot \cos\alpha + N_2 = 0 \qquad (4)$$

Iz (3) N_2=91,8N, to uvršteno u (4) daje N=77,98N. Sila N je veza sa drugim tijelom pa uvrštena u (2) daje traženi iznos mase m_1=5,11kg.
Jednadžba (1) nije iskorištena, ali ona vrijedi jer možemo izračunati iznos reakcije N_1 koji se ne traži.
Zašto nisu postavljane sume momenata?
Za tijelo 1. sve sile prolaze kroz središte zakrivljenosti pa je samim time njihov krak oko središta nula a smaim time i iznosi pojedinih i ukupnog momnta. Zašto? Sila težine prolazi kroz težite tijela koje je ujedno i središte zakrivljenosti, a sile reakcije leže imaju smjer koji se poklapa s polumjerima kruga pa prolaze opet kroz dredište zakrivljenosti. Podsjetimo se, normala je okomita na tangentu kružnice koja je istovremeno stranica bloka i koja definira u točki dodira dvaju tijela ravninu na koju se postavlja normala. Sumu momenata na blok mase m nije moguće postaviti jer ne znamo dimenzije tijela. Zbog trećeg uvjeta ravnoteže ona mora biti zadovoljena.

Zadatak 2. Na valjak polumjera R koji se može slobodno okretati oko točke A djeluje moment M, a istovremeno ga pritišće blok mase m. Odredite udaljenost x da bi sustav bio u ravnoteži! Zadano je: μ=0,18, R=0,4m, M=1,2Nm, m=2,2kg, a=0,3m.



Oslobodimo tijela veza:



Postavimo uvjete ravnoteže za oba tijela, samo sume momenata oko točaka A i B.

Tijelo 1.

$$\sum M_A = 0 \qquad M - \mu \cdot N \cdot R = 0$$

Ostale sile prolaze kroz središte kruga pa nemaju momenta oko točke A.

Druga važna činjenica je da nam ovaj izraz omogućuje odrediti točnu orijentaciju sile trenja i to koristeći očitu činjenicu da moment M mora imati suprotni moment od momenta sile trenja oko točke A. To je samo dosljedna primjena pravila desne ruke. Pogriješimo li ovdje sila trenja će imati krivu orijentaciju i na tijelu 2. što će nas dovesti do pogrešnog rješenja.

Iz ove jednadžbe dobivamo vrijednost sile N.

$$N = \frac{\mu \cdot N}{R} = 16{,}67N$$

Tijelo 2.

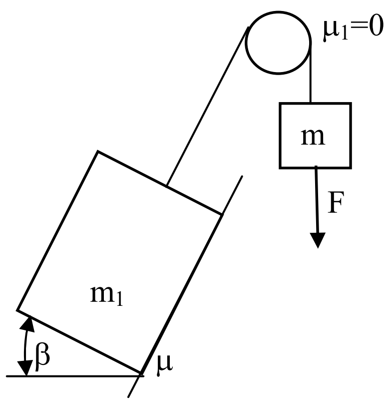
$$\sum M_B = 0 \qquad m \cdot g \cdot a - \mu \cdot N \cdot a - N \cdot (2 \cdot a - x) = 0$$

Sređivanjem izraza i uvrštavanjem vrijednosti sile N dobivamo traženu udaljenost x.

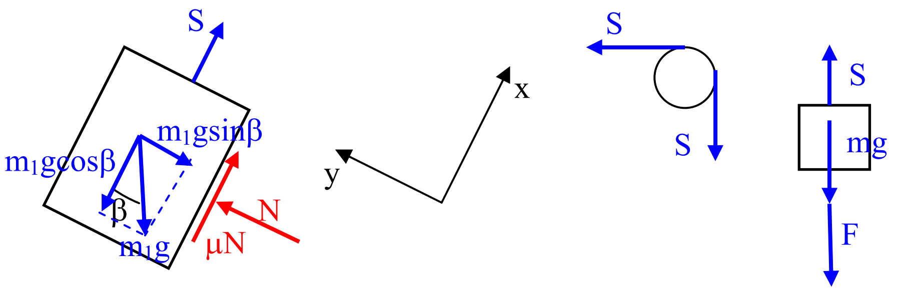
$$x = a \cdot \left(2 + \mu - \frac{m \cdot g}{N}\right) = 0{,}266m$$

I na kraju. Što sa sumama sila. One moraju biti zadovoljene. Postavite ih pa ćete vidjeti, ali iz njih ćemo moći izračunati vrijednosti reakcija u nepomičnim osloncima, a to se ne traži u tekstu zadatka. Zato nisu ni postavljane.

Zadatak 3. Uteg mase m preko užeta održava masu m_1 u ravnoteži. Kolikom minimalnom silom F treba povlačiti masu m prema dolje da se ona ne bi počela podizati?. Zadano je: m_1=4kg, m=1,5kg, μ=0,11, β=35°.



Početak rješavanja zadataka s trenjem identičan je rješavanju prethodnik zadataka. Tijelo prvo treba osloboditi veza (izolirati!)



Komentar: kao reakcija podloge na tijelo mase m_1 pojavljuje se normalna komponenta (okomita na ravninu podlogu) uvijek orijentirana prema tijelu, te tangencijalna komponenta μN (u smjeru ravnine podloge) koja se naziva sila trenja. Te dvije komponente su međusobno okomite! Orijentacija vektora sile trenja određuje se prema smjeru gibanja koje bi nastupilo u slučaju neravnoteže (to se iščitava iz teksta zadatka). U ovom zadatku bi se prema tekstu, masa m počela gibati prema gore u slučaju neravnoteže, što bi za posljedicu imalo spuštanje mase m_1 niz kosinu. Stoga je orijentacija vektora sile trenja μN prema gore. Također treba uočiti da je sila u oba kraka užeta jednaka (S) jer između užeta i nepomičnog valjka (podloge) nema trenja a ovakva orijentacija sile S osigurava napetost užeta!

Napomena: pri rješavanju zadataka iz sile trenja na kosini uobičajeno je odabrati koordinatni sustav definiran nagibom kosine (kao na slici). Time se pojednostavljuje rješavanje u trigonometrijskom smislu.

Postavljanje analitičkih uvjeta ravnoteže za masu m_1:

$\Sigma F_x=0$: $S - m_1 \cdot g \cdot \cos\beta + \mu \cdot N = 0$ (1) $\Sigma F_y=0$: $N - m_1 \cdot g \cdot \sin\beta = 0$ (2)

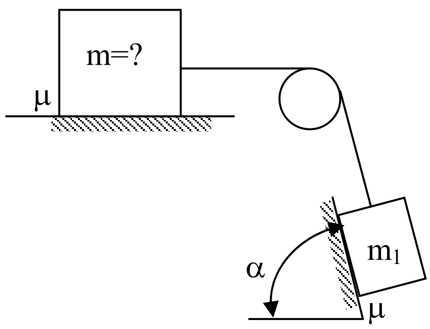
Iz uvjet ravnoteže za masu m računa se sila u užetu S (trenja užeta o podlogu nema, zadano je $\mu_1=0$):

$S - m \cdot g - F = 0$ (3)

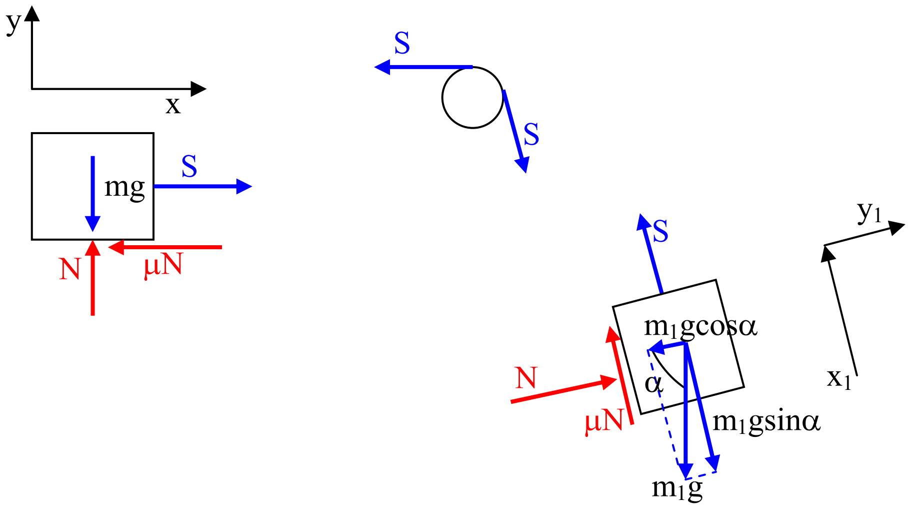
Iz (2) slijedi $N = m_1 \cdot g \cdot \sin\beta$, a iz (3) slijedi $S = m \cdot g + F$ što uvrštavanjem u (1) daje:

$\underline{F=14{,}95\text{N}}$

Zadatak 4. Odredite minimalni iznos mase m da je masa m_1 ne bi povukla za sobom. Zadano je $\mu=0{,}15$, $m_1=4\text{kg}$, $\alpha=55°$.



Ovaj zadatak se rješava na sličan način kao i prethodni. Iz teksta zadatka je vidljivo da bi u slučaju neravnoteže masa m_1 počela kliziti niz kosinu, a za sobom bi povlačila masu m obzirom da su te dvije mase povezane u sustav užetom koje mora biti napeto. Nakon oslobađanja tijela veza mogu se postaviti uvjeti ravnoteže za obje mase.



Opet je radi lakšeg rješavanja korisno odabrati dva koordinatna sustava. Veza između dva tijela je uže u kojem vlada sila S i to u oba kraka jer nema trenja između užeta i podloge.

Za masu m (i koordinatni sustav Oxy) vrijedi:

$\Sigma F_x = 0: \quad -\mu \cdot N + S = 0 \quad (1) \qquad \Sigma F_y = 0: \quad -m \cdot g + N = 0 \quad (2)$

Za masu m_1 (i koordinatni sustav Ox_1y_1) vrijedi:

$$\Sigma F_{x_1} = 0: \quad -S - \mu \cdot N_1 + m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha = 0 \quad (3)$$
$$\Sigma F_{y_1} = 0: \quad N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha = 0 \quad (4)$$

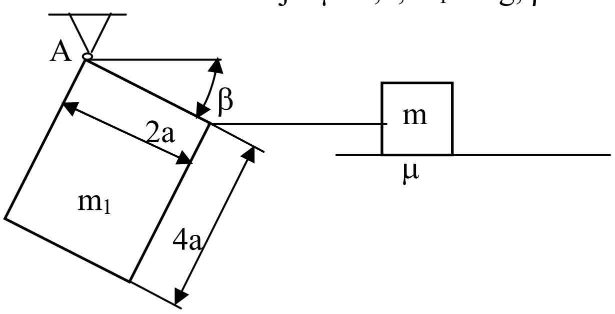
Iz (4) je $N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$ što uvršteno u (4) daje iznos sile S:

<u>S=28,8N</u>

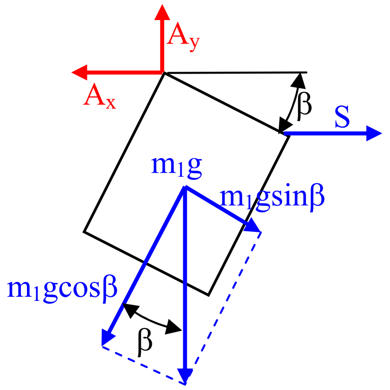
Iz (2) je $N = m \cdot g$ što uvršteno u (1) daje minimalni iznos mase m da bi sustav ostao u ravnoteži:

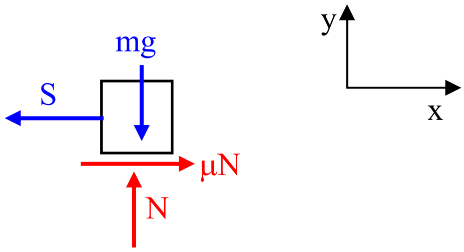
<u>m=19,5kg</u>

Zadatak 5. Uteg mase m preko užeta održava masu m_1 u ravnoteži. Koliki je minimalni iznos m da bi sustav bio u ravnoteži? Zadano je: μ=0,2, m_1=4kg, β=20°.



Nakon oslobađanja tijela veza može se za svaku masu postaviti uvjete ravnoteže.





Za masu m postavlja se suma momenata oko točke A kako bi se isključile reakcije koje se javljaju zbog veze s nepomičnim osloncem u toj točki. Sume sila mogu se postaviti, ali to u ovom zadatku nije potrebno jer nam za nastavak rješavanja nisu potrebni iznosi reakcija u točki A. Bez obzira na to, ti uvjeti ravnoteže moraju biti zadovoljeni.

$$\Sigma M_A = 0: \quad S \cdot 2 \cdot a \cdot \sin\beta + m_1 \cdot g \cdot \sin\beta \cdot \frac{4 \cdot a}{2} - m_1 \cdot \cos\beta \cdot \frac{2 \cdot a}{2} = 0 \qquad (1)$$

Za masu m uvjeti ravnoteže su za odabrani koordinatni sustav Oxy:

$$\Sigma F_x = 0: \quad -S + \mu \cdot N = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_{y_1} = 0: \quad -m \cdot g + N = 0 \qquad (3)$$

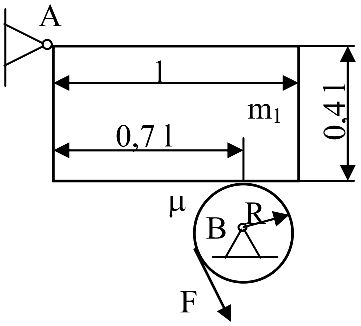
Iz (1) se može izračunati iznos sile u užetu S:

S=14,7N

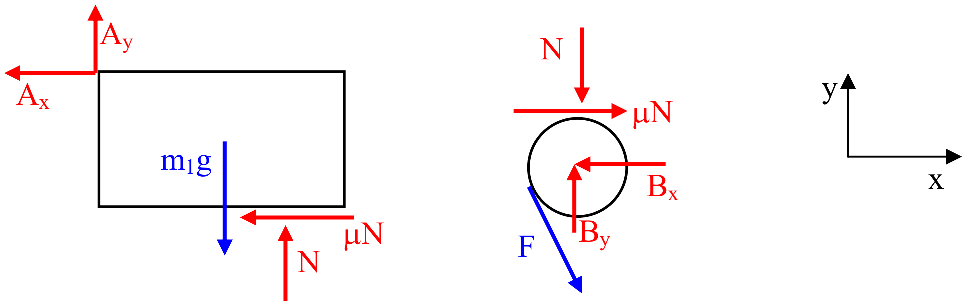
Iz (3) je $N = m \cdot g$ što uvršteno u (2) daje minimalni iznos mase m da bi sustav ostao u ravnoteži:

m=7,49kg

Zadatak 6. Odredite minimalni iznos m_1 potrebne da bi se zakočio valjak polumjera R na koji djeluje sila F. Zadano je:F=30N, μ=0,11.



Nakon oslobađanja tijela veza može se za svaku masu postaviti uvjete ravnoteže.



Kao i u prethodnom zadatku zadatak se može riješiti postavljanjem sume momenata oko točaka A i B.
U točki dodira između mase m_1 i valjka djeluje sila trenja koje je orijentaciju vektora nužno točno odrediti. To je lakše odrediti ako se prvo postavi suma momenata oko točke B odnosno za valjak:

$$\Sigma M_B = 0: \qquad F \cdot R - \mu \cdot N \cdot R = 0 \qquad (1)$$

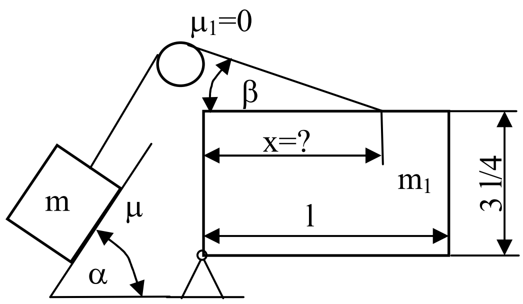
Očito je da jedino ovako orijentirana sila trenja može u sumi momenata dati 0 (nulu).
Ako sila trenja ima ovakvu orijentaciju na valjku onda ta ista sila kad djeluje na masu m_1 mora imati suprotnu orijentaciju. Isto vrijedi i za normalnu komponentu.
Suma momenata oko točke A glasi:

$$\Sigma M_A = 0: \qquad -m_1 \cdot g \cdot \frac{l}{2} - \mu \cdot N \cdot 0{,}4 \cdot l + N \cdot 0{,}7 \cdot l = 0 \qquad (2)$$

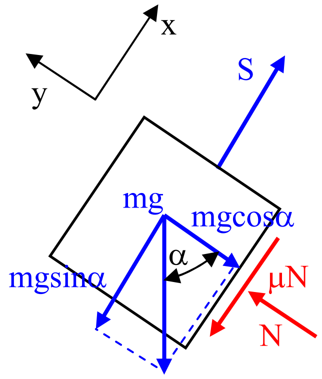
iz (1) slijedi $N = 272{,}7N$ što uvršteno u (2) daje minimalni iznos mase m_1 koji će biti dovoljan da ne dođe do zakretanja valjka pod djelovanjem sile F tj. do njegova proklizavanja:

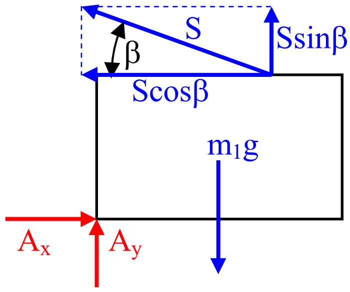
<u>m_1=36,5kg</u>

Zadatak 7. Odredite udaljenost x na kojoj treba učvrstiti uže da uteg mase m_1 ne bi pao.
Zadano je: m=2kg, m_1=2,2kg, l=0,4m, μ=0,09, α=35°, β=15°.



Nakon oslobađanja tijela veza može se za svaku masu postaviti uvjete ravnoteže.





Za masu m na kosini za koordinatni sustav Oxy vrijedi:

$$\Sigma F_x = 0: \qquad S - \mu \cdot N - m \cdot g \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{y_1} = 0: \qquad -m \cdot g \cdot \cos\alpha + N = 0 \qquad (2)$$

iz (2) je $N = m \cdot g$ što uvršteno u (1) daje vrijednost sile u užetu:

<u>S=12,7N</u>

Suma momenata oko točke A za blok mase m_l mora biti jednaka nuli:

$$\Sigma M_A = 0: \qquad -m_1 \cdot g \cdot \frac{l}{2} + S \cdot \sin\beta \cdot x + S \cdot \cos\beta \cdot \frac{3}{4} \cdot l = 0 \qquad (3)$$

iz čega je moguće izračunati udaljenost x na kojoj treba pričvrstiti uže da bi zadani sustav bio u ravnoteži:

<u>x=0,194m</u>