

U nastavku su obrađene tri tipične i najjednostavnije situacije opterećenja grede (nosača) savijanjem. To je opterećenje koncentriranom silom, momentom i kontinuiranim opterećenjem. Sve grede su istog izgleda i oslonjene su na dva oslonca, pomični i nepomični. Oslonci se nalaze na krajevima grede a ponašaju se isto onako kako je objašnjeno u prvom poglavlju „Pravilo izolacije.“ Ove tri situacije bit će jedine koje će se pojavljivati u zadacima, jedino što se može promijeniti su zadani brojevi, ali uz prikazani postupak lako je doći do novih rješenja.

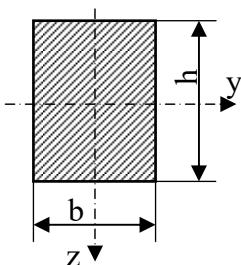
Kao posljedica vanjskih opterećenja u unutarnjim presjecima pojavljuju se unutarnje sile i momenti koji uzrokuju naprezanje. Te unutarnje sile i momente moguće je grafički prikazati kako je to ovdje i učinjeno. Kako se došlo do toga, zbog kratkog vremena, nije ovdje objašnjeno. Prikazani dijagrami su dijagram unutarnjih sila (Q dijagram) i dijagram unutarnjih momenata (M dijagram). Ovaj potonji nam je važan za računanje naprezanja prema općem izrazu za naprezanje:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad [\text{MPa}] \quad (1)$$

gdje je M_y [Nm] moment savijanja očitan iz M dijagrama ili izračunat kako je prikazano, a I_y moment tromosti [m^4]. Obratite pozornost na odabrani koordinatni sustav, kojem os y gleda okomito iz papira prema vama. To je ujedno indeks u prethodno opisanom momentu M_y i momentu tromosti I_y . Slovo z označava vrijednost koordinate z prma zadatom koordinatnom sustavu tj. udaljenost točke presjeka od neutralne osi tj. vrijednosti nula. Moment otpora w_y dobiva se prema izrazu:

$$w_y = \frac{I_y}{z_{\max}} \quad (2)$$

gdje z_{\max} predstavlja maksimalnu vrijednost koordinate z tj. točku presjeka koja je najudaljenija od neutralne osi. Za gredu pravokutnog poprečnog presjeka to izgleda ovako.



Moment tromosti i momenta otpora su:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (3)$$

$$\text{uz } z_{\max} = \frac{h}{2} \Rightarrow w_y = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad (4)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u izraz (1) dobijemo sljedeći izraz.

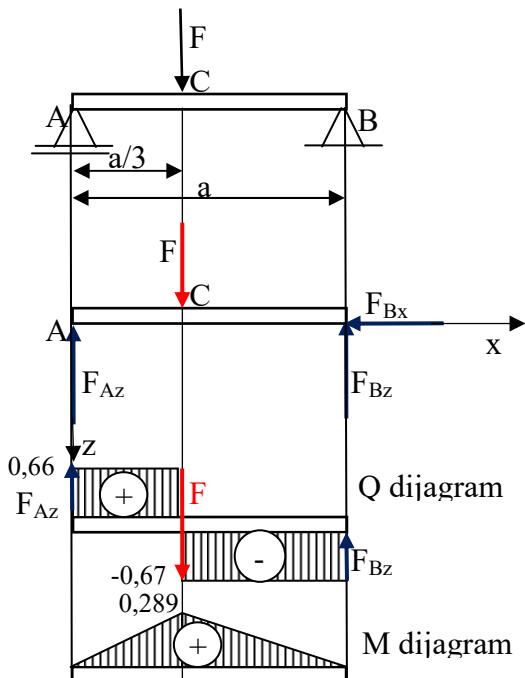
$$\sigma = \frac{M_y}{w_y} \quad (5)$$

a uvrštavanjem izraza (4) u izraz (5) za konkretni poprečni presjek prikazan slikom dobije se:

$$\sigma = \frac{6 \cdot M_y}{b \cdot h^2} \quad (6)$$

Ovaj izraz nam omogućuje da izračunamo najveće naprezanje u određenom presjeku, a ako u brojnik uvrstimo iznos maksimalnog momenta kojeg očitamo iz M dijagrama dobit ćemo maksimalno naprezanje u greda. Sa stanovišta proračuna to nam je najinteresantnija veličina.

Zadatak 1. Greda je opterećena koncentriranom silom F. Koliko iznosi maksimalno naprezanje u gredi ako je poprečni presjek grede pravokutnik postavljen po visini dimenzije bxh (širina puta visina)? Zadano je: F=1,32kN, a=1,3m, b=80mm, h=120mm.



Zadatak počinjemo oslobođanjem tijela veza kao što smo prije naučili. Rješenja su:

$$\sum F_z = 0 \quad -F_{Az} + F + F_{Bz} = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad -F_{Az} \cdot a + F \cdot \frac{2 \cdot a}{3} = 0$$

Iz ove dvije jednadžbe dobiju se rješenja:

$$F_{Az} = 0,66 \text{ kN}$$

$$F_{Bz} = 0,327 \text{ kN}$$

$$F_{Bx} = 0$$

Kao rezultat vanjskih opterećenja, ovdje su to aktivna sila F i sile reakcija F_{Az}, F_{Bz} i F_{Bx} (=0), u gredi su se pojavile unutarnje sile i momenti koji su prikazani odgovarajućim Q i M dijagramima koje nećemo učiti crtati. Zadaci koji će se zadavati kod provjere znanja imat će kvalitativno iste dijagrame, a mijenjat će se samo brojevi, pa je na temelju prikazanog postupka moguće doći do novih vrijednosti dijagrama.

Za računanje maksimalnog naprezanja potrebna nam je maksimalna vrijednost momenta koju očitamo iz M-dijagrama. Ta se vrijednost uvijek pojavljuje u točki gdje djeluje koncentrirana sila (F).

Kako smo izračunali tu vrijednost?

Tako što smo izračunali vrijednost momenta u točki C kao umnožak jedne ili druge reakcije i njihovih udaljenosti od točke C. vrijednost mora biti ista. To izgleda ovako:

$$M_{y_{\max}} = F_{Az} \cdot \frac{a}{3} = F_{Cz} \cdot \frac{2 \cdot a}{3} = 0,289 \text{ kNm}$$

Prema tome u točki C nastupa maksimalno naprezanje i koristeći izraz (6) lako se izračuna iznos:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y_{\max}}}{w_y} = \frac{0,289 \cdot 10^6}{80 \cdot 120^2} = 1,51 \text{ MPa}$$

6

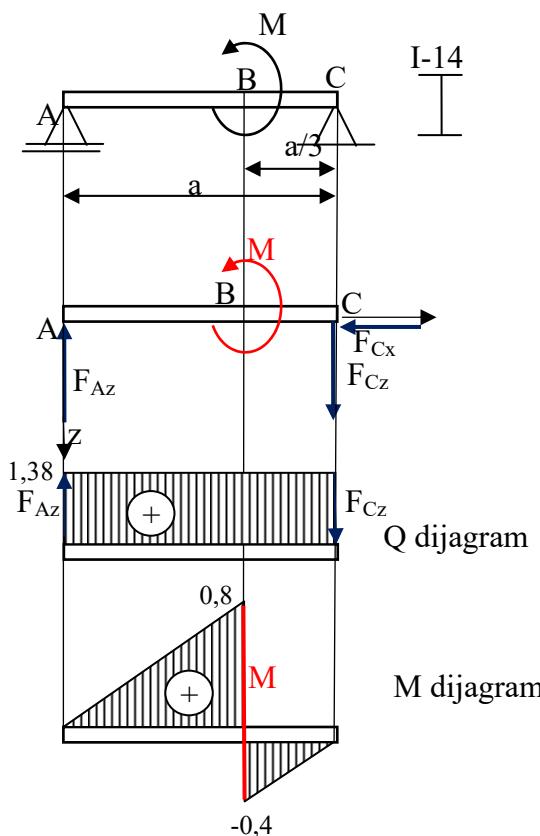
Za iznos momenta M_y uzima se po absolutnoj vrijednosti najveću vrijednost iz M dijagrama. To ovdje nije problem jer je cijeli dijagram pozitivan.

Vrijednost naprezanja vrlo je mala što znači da je poprečni presjek grede puno prevelik tj. poprečni presjek je loše iskorišten. Greda bi mogla biti manjih dimenzija.

Napomenimo da korištenjem općeg izraza za naprezanje možemo izračunati naprezanje u bilo kojoj točki presjeka!

Ponovimo da nam je u praksi uvijek najinteresantnije mjesto gdje naprezanje postiže svoj maksimum.

Zadatak 2. Greda je opterećena momentom savijanja M. Koliko iznosi maksimalno naprezanje u gredi ako je poprečni presjek grede standardni profil I-14 okrenut prema slici? Zadano je: M=1,2kNm, a=1,3m. Moment otpora profila I-14 očitajte iz priložene tablice profila.



Zadatak počinjemo oslobađanjem tijela veza kao što smo prije naučili. Rješenja su:

$$\sum F_z = 0 \quad -F_{Az} + F_{Cz} = 0$$

$$\sum M_C = 0 \quad -F_{Az} \cdot a + M = 0$$

Iz ove dvije jednadžbe dobiju se rješenja:

$$F_{Az} = F_{Cz} = 0,92 \text{ kN},$$

$$F_{Cx} = 0$$

Maksimalni moment M_{yA} ćemo izračunati tako da izračunamo momente reaktivnih sila oko točke u kojoj djeluje moment M te ih usporedimo. Zbog jednostavnosti ćemo izračunati absolutne vrijednosti momenata savijanja::

$$|M_{yA}| = F_{Az} \cdot \frac{2}{3} \cdot a = 0,92 \text{ kN} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,3 \text{ m} = 0,8 \text{ kNm} \text{ i}$$

$$|M_{yC}| = F_{Cz} \cdot \frac{1}{3} \cdot a = 0,92 \text{ kN} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,3 \text{ m} = 0,4 \text{ kNm}$$

Vidimo da je:

$$|M_{yA}| > |M_{yC}|$$

pa možemo zaključiti da je maksimalni iznos momenta:

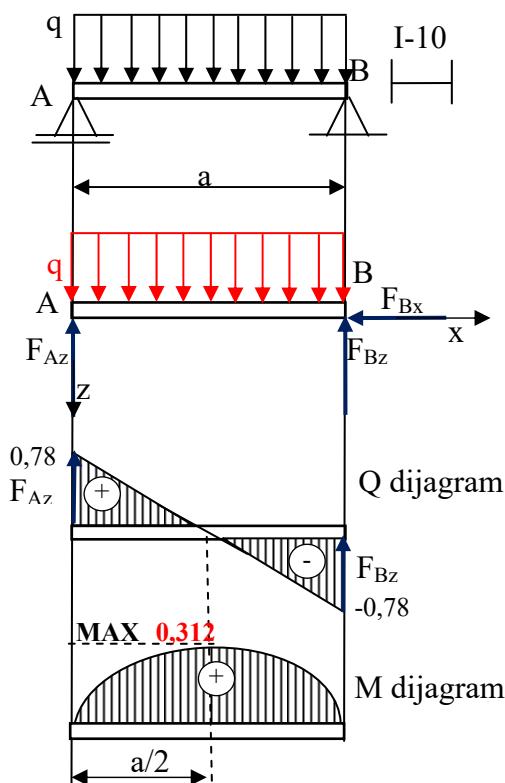
$$|M_{yA}| = M_{y\max} = 0,8 \text{ kNm}$$

U tablici nađimo redak I-14, sve podatke o tom profilu možemo očitati u tom retku. Pripazite na koordinatne osi jer se ne podudaraju s našim koordinatnim sustavom. O kojim osima se radi vidjet ćeće usporedbom slike kako je profil postavljen. U konkretnom slučaju vrijednost je $w_y = 81,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$. Primijetite da os x u tablici odgovara našoj osi y!

Naposljetku iznos naprezanja je:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y\max}}{w_y} = \frac{0,8 \cdot 10^6}{81,9 \cdot 10^3} = 9,76 MPa$$

Zadatak 3. Greda je opterećena kontinuiranim opterećenjem q . Koliko iznosi maksimalno naprezanje u gredi ako je poprečni presjek grede standardni profil I-10 položen po visini (v. sliku)? Zadano je: $q=1,2 kN/m$, $a=1,3 m$. Moment otpora profila I-10 očitajte iz priložene tablice profila.



Zadatak počinjemo oslobađanjem tijela, ovdje malo detaljnije jer se od sada nismo susreli s pojmom kontinuiranog opterećenja q . Ta veličina ima jedinicu kN/m pa kada nam je poznato na kojoj duljini (metara) djeluje njen iznos ima jedinicu (k)N kao i sila. Pema svom djelovanju u unutarnjim presjecima razlikuje od sile. Oslobodimo gredu veza i postavimo uvjete ravnoteže. Prije toga uočavamo odmah da je $F_{Cx}=0$

$$\sum F_z = 0 \quad -F_{Az} - F_{Bz} + q \cdot a = 0$$

Uočimo novost, a to je djelovanje kontinuiranog opterećenja q (kN/m) na duljini a (m) što daje ekvivalentnu silu u N. Ovdje se to može poistovjetiti s djelovanjem koncentrirane sile F .

$$\sum M_A = 0 \quad F_{Bz} \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = 0$$

Za moment što ga čini sila F_{Cz} oko točke A ne treba objašnjenja, pa pogledajmo kao djeluje kontinuirano opterećenje q . Ono djeluje na duljini a i što daje iznos u (k)N i to je isti član kao u $\sum F_z = 0$ tj. $q \cdot a$. Tu ekvivalentnu silu treba pomnožiti krakom koji ćemo izračunati kao udaljenost težišta pravokutnika koji prikazuje kontinuirano opterećenje q od točke oko koje računamo momenta, ovdje je to točka A.

To je član $\frac{1}{2} \cdot a$.

Iz uvjeta ravnoteže iznosi reakcija su:
 $F_{Az} = F_{Bz} = 0,78 kN$

Karakteristično za ovu vrstu opterećenja je funkcionalna ovisnost unutarnjeg momenta M_y o x u obliku polinoma drugog stupnja.

Uočimo da se između točaka A i B pojavila parabola (polinom) 2. stupnja kako je rečeno i da je između te dvije točke postigla i svoj maksimum i to točno na sredini grede ($a/2$).

Vrijednost maksimuma parabole tj. maksimalnog iznosa momenta između točaka A i B dobivamo kako slijedi:

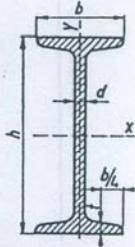
$$M_{y\max} = F_{Az} \cdot \frac{a}{2} - q \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = 0,312 kNm$$

Izračunajmo sada naprezanje za profil I-10 koji je sada položen po visini kako je prikazano slikom.

Zbirka zadataka iz „Osnova strojarstva“ – studij „Primijenjena kemija“
Savijanje - riješeni primjeri

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y_{\max}}}{w_y} = \frac{0,312 \cdot 10^6}{4,88 \cdot 10^3} = 63,9 MPa$$

Maksimalni moment opet smoочitali iz M dijagrama, a vrijednost momenta otpora I-10 profila je ona za os y iz tablice jer je taj profil sada položen po visini ili možemo reći i polegnut.



Čelični profili I
vruće valjani (JUS C.B3.131 — 1962)

Statičke veličine:

I — moment tromosti plohe
W — moment otpora

Polumjer tromosti:

$$i_x = \sqrt{I_x/A}$$

$$i_y = \sqrt{I_y/A}$$

Konstrukcijske mjere — vidi str. 431!

Oznaka*	Dimenzijs mm				Pre- sjek s mm ²	Dulj. masa kg/m	Statičke veličine			
	h	b	d	t			I_x 10^4 mm^4 (= cm ⁴)	I_y 10^4 mm^4 (= cm ⁴)	W_x 10^3 mm^3 (= cm ³)	W_y 10^3 mm^3 (= cm ³)
8	80	42	3,9	5,9	758	5,95	77,8	6,3	19,5	3,00
10	100	50	4,5	6,8	1 060	8,32	171	12,2	34,2	4,88
12	120	58	5,1	7,7	1 420	11,2	328	21,5	54,7	7,41
14	140	66	5,7	8,6	1 830	14,4	573	35,2	81,9	10,7
16	160	74	6,3	9,5	2 280	17,9	935	54,7	117	14,8
18	180	82	6,9	10,4	2 790	21,9	1 450	81,3	161	19,8
20	200	90	7,5	11,3	3 350	26,3	2 140	117	214	26,0
(22)	220	98	8,1	12,2	3 960	31,1	3 060	162	278	33,1
24	240	106	8,7	13,1	4 610	38,2	4 250	221	354	41,7
26	260	113	9,4	14,1	5 340	41,9	5 740	288	442	51,0
(28)	280	119	10,1	15,2	6 110	48,0	7 590	364	543	61,2
30	300	125	10,8	16,2	6 910	54,2	9 800	451	653	72,2
(32)	320	131	11,5	17,3	7 780	61,1	12 510	555	782	84,7
34	340	137	12,2	18,3	8 680	68,1	15 700	674	923	98,3
(36)	360	143	13,0	19,5	9 710	76,2	19 610	818	1 090	114,0
(38)	380	149	13,7	20,5	10 700	84,0	24 010	975	1 250	131,0
40	400	155	14,4	21,6	11 800	92,6	29 210	1 160	1 460	149,7

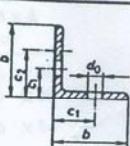
* Treba se kloniti dimenzija u zagradama.

Normalne duljine čeličnih profila I: 4...15 m.

Konstrukcijske mjere čeličnih profila (po DIN 997)

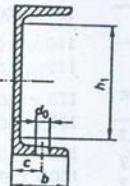
Sve mjere u mm

Čelični kutni profili



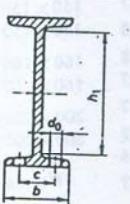
b	h	c ₁	c ₂	d ₀ max.	b	h	c ₁	c ₂	d ₀ max.
20	12	—	—	4,3	75	40	—	—	23
25	15	—	—	6,4	80	45	—	—	23
30	17	—	—	8,4	90	50	—	—	25
35	18	—	—	11	100	45	60	25	25
40	22	—	—	11	110	45	70	25	25
45	25	—	—	13	120	50	80	25	25
50	30	—	—	13	130	50	90	25	25
55	30	—	—	17	140	50	95	28	28
60	35	—	—	17	150	50	105	28	28
65	35	—	—	21	160	60	115	28	28
70	40	—	—	21	200	60	150	28	28

Čelični profili L



b	c	d ₀ max.	h ₁	b	c	d ₀ max.	h ₁
42	25	11	33	75	40	23	151
45	25	13	46	80	45	23	167
50	30	13	64	85	45	25	184
55	30	17	82	90	50	25	200
60	35	17	98	95	50	25	216
65	35	21	115	100	55	25	222
70	40	21	133				

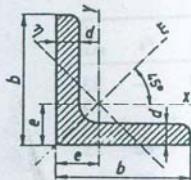
Čelični profili T



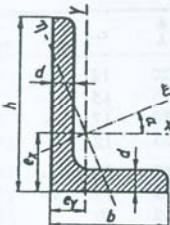
b	c	d ₀ max.	h ₁	b	c	d ₀ max.	h ₁
42	22	6,4	59	113	60	17	208
50	28	6,4	75	119	62	17	225
58	32	8,4	92	125	64	21	241
66	34	11	109	131	70	21	258
74	40	11	125	137	74	21	274
82	44	13	142	143	76	23	290
90	48	13	159	149	82	23	306
98	52	13	176	155	86	23	323
106	56	17	192				

Čelični kutni profili — vruće valjani

Jednakokračni kutni profili
(JUS C.B3.101 — 1962)



Raznokračni kutni profili
(JUS C.B3.111 — 1962)



Statičke veličine:

$I_x = I_y$ — moment tromosti plohe

$W_x = W_y$ — moment otpora

i_q — polumjer tromosti

Konstrukcijske mjere — vidi str. 431!

Jednakokračni kutni profili

Oznaka	Pre-sjek $b \times b \times d$ mm ²	Dulj. masa kg/m	Statičke veličine				
			e mm	$I_x = I_y$ 10^4 mm^4 (= cm ⁴)	$W_x = W_y$ 10^3 mm^3 (= cm ³)	i_q mm	
20 × 20 × 3	112	0,88	6,0	0,39	0,15	0,28	0,18
25 × 25 × 3	142	1,12	7,3	0,79	0,31	0,45	0,30
25 × 25 × 4	185	1,45	7,6	1,01	0,40	0,58	0,37
30 × 30 × 3	174	1,36	8,4	1,41	0,57	0,65	0,48
30 × 30 × 4	227	1,78	8,9	1,81	0,76	0,86	0,61
30 × 30 × 5	278	2,18	9,2	2,16	0,91	1,04	0,70
35 × 35 × 4	267	2,10	10,0	2,96	1,24	1,18	0,88
40 × 40 × 4	308	2,42	11,2	4,48	1,86	1,56	1,18
40 × 40 × 5	379	2,97	11,6	5,43	2,22	1,91	1,35
45 × 45 × 5	430	3,38	12,8	7,83	3,25	2,43	1,80
50 × 50 × 5	480	3,77	14,0	11,0	4,59	3,05	2,32
50 × 50 × 6	569	4,47	14,5	12,8	5,24	3,61	2,57
55 × 55 × 6	631	4,95	15,6	17,3	7,24	4,40	3,28

Normalne duljine jednakokračnih kutnih profila: 3...15 m.

Jednakokračni kutni profili (nastavak)

Oznaka	Pre-sjek $b \times b \times d$ mm ²	Dulj. masa kg/m	e mm	Statičke veličine			
				$I_x = I_y$ 10^4 mm^4 (= cm ⁴)	I_q 10^4 mm^4 (= cm ⁴)	$W_x = W_y$ 10^3 mm^3 (= cm ³)	W_q 10^3 mm^3 (= cm ³)
60 × 60 × 6	691	5,42	16,9	22,8	9,43	5,29	3,95
60 × 60 × 8	903	7,09	17,7	29,1	12,1	6,88	4,84
65 × 65 × 7	870	6,83	18,5	33,4	13,8	7,18	5,27
70 × 70 × 7	940	7,38	19,7	42,4	17,6	8,43	6,31
70 × 70 × 9	1190	9,34	20,5	52,6	22,0	10,6	7,59
75 × 75 × 8	1150	9,03	21,3	58,9	24,4	11,0	8,11
75 × 75 × 10	1410	11,1	22,1	71,4	29,8	13,5	9,55
80 × 80 × 8	1230	9,66	22,6	72,3	29,6	12,6	9,25
80 × 80 × 10	1510	11,9	23,4	87,5	35,9	15,5	10,9
80 × 80 × 12	1790	14,1	24,1	102	43,0	18,2	12,6
90 × 90 × 9	1550	12,2	25,4	116	47,8	18,0	13,3
90 × 90 × 11	1870	14,7	26,2	138	57,1	21,6	15,4
100 × 100 × 10	1920	15,1	28,2	177	73,3	24,7	18,4
100 × 100 × 12	2270	17,8	29,0	207	86,2	29,2	21,0
110 × 110 × 10	2120	16,6	30,7	239	98,6	30,1	22,7
110 × 110 × 12	2510	19,7	31,5	280	116	35,7	26,1
120 × 120 × 11	2540	19,9	33,6	341	140	39,5	29,5
120 × 120 × 13	2970	23,3	34,4	394	162	46,0	33,3
130 × 130 × 12	3000	23,6	36,4	472	194	50,4	37,7
130 × 130 × 14	3470	27,2	37,2	540	223	58,2	42,4
140 × 140 × 14	3720	29,2	40,2	692	282	69,3	49,7
140 × 140 × 16	4220	33,2	40,9	775	318	78,2	55,0
150 × 150 × 14	4030	31,6	42,1	845	347	78,2	58,3
150 × 150 × 16	4570	35,9	42,9	949	391	88,7	64,4
160 × 160 × 15	4610	36,2	44,9	1100	453	95,6	71,3
160 × 160 × 17	5180	40,7	45,7	1230	506	108	78,3
200 × 200 × 16	6180	48,5	55,2	2340	943	162	121
200 × 200 × 18	6910	54,3	56,0	2600	1050	181	133

Normalne duljine jednakokračnih kutnih profila: 3...15 m.

Raznokračni kutni profili

Oznaka	Pre-sjek $b \times h \times d$ mm ²	Dulj. masa kg/m	Statičke veličine				
			e_x mm	e_y mm	I_x 10^4 mm^4 (= cm ⁴)	I_y 10^4 mm^4 (= cm ⁴)	W_x 10^3 mm^3 (= cm ³)
20 × 30 × 3	142	1,11	9,9	5,0	1,25	0,44	0,62
20 × 30 × 4	185	1,45	10,3	5,4	1,59	0,55	0,81
20 × 40 × 3	172	1,35	14,3	4,4	2,79	0,47	1,08
30 × 45 × 4	287	2,25	14,8	7,4	5,78	2,05	1,91
40 × 60 × 5	479	3,76	19,6	9,7	17,2	6,11	4,25
40 × 60 × 6	568	4,46	20,0	10,1	20,1	7,12	5,03
40 × 60 × 7	655	5,14	20,4	10,5	23,0	8,07	5,79
40 × 80 × 6	689	5,41	28,5	8,8	44,9	7,59	8,73
50 × 65 × 5	554	4,35	19,9	12,5	23,1	11,9	5,11
50 × 65 × 7	760	5,97	20,7	13,3	31,0	15,8	6,99
50 × 100 × 10	1410	11,1	36,7	12,0	141	23,4	22,2
55 × 75 × 7	866	6,80	24,0	14,1	47,9	21,8	9,39
60 × 90 × 6	869	6,82	28,9	14,1	71,7	25,8	11,7
60 × 90 × 8	1140	8,96	29,7	14,9	92,5	33,0	15,4
65 × 80 × 8	1100	8,66	24,7	17,3	68,1	40,1	12,3
65 × 100 × 9	1420	11,1	33,2	15,9	141	46,7	21,0
65 × 100 × 11	1710	13,4	34,0	16,7	167	55,1	11,4
65 × 130 × 10	1860	14,6	46,5	14,5	321	54,2	10,7
75 × 130 × 8	1590	12,5	43,6	16,5	276	68,3	11,7
80 × 120 × 8	1550	12,2	38,3	18,7	226	80,8	13,2
80 × 120 × 10	1910	15,0	39,2	19,5	276	98,1	16,2
80 × 120 × 12	2270	17,8	40,0	20,3	323	114	19,1
90 × 130 × 10	2120	16,6	41,5	21,8	358	141	20,6
90 × 130 × 12	2510	19,7	42,4	22,6	420	165	24,4
100 × 150 × 10	2420	19,0	48,0	23,4	552	198	25,8
100 × 150 × 12	2870	22,6	48,9	24,2	650	232	30,6
100 × 200 × 12	3480	27,3	70,3	21,0	1440	247	31,3
100 × 200 × 14	4030	31,6	71,2	21,8	1650	282	36,1

Normalne duljine raznokračnih kutnih profila: 3...15 m.

Čelični profili

vruće valjani (JUS C.B3.141 — 1962)

Statičke veličine:

$I_x = \sqrt{I_x / A}$ — moment tromosti plohe

$W_x = \sqrt{I_x / A}$ — moment otpora

Polumjer tromosti:

$$i_x = \sqrt{I_x / A}$$

$$i_y = \sqrt{I_y / A}$$

Konstrukcijske mjere — vidi str. 431!

Oznaka*	Dimenzije mm				Pre-sjek S mm ²	Duljinska masa kg/m	Statičke veličine			
	h	b	d	t			e	I_x 10^4 mm^4 (= cm ⁴)	I_y 10^4 mm^4 (= cm ⁴)	W_x 10^3 mm^3 (= cm ³)
6,5	65	42	5,5	7,5	903	7,09	14,2	57,5	14,1	17,7
8	80	45	6	8	1100	8,64	14,5	106	19,4	26,5
10	100	50	6	8,5	1350	10,6	15,5	206	29,3	41,2
12	120	55	7	9	1700	13,4	16,0	364	43,2	60,7
14	140	60	7	10	2040	16,0	17,5	605	62,7	86,4
16	160	65	7,5	10,5	2400	18,8	18,4	925	85,3	116
18	180	70	8	11	2800	22,0	19,2	1350	114	150
20	200	75	8,5	11,5	3220	25,3	20,1	1910	148	191
(22)	220	80	9	12,5	3740	29,4	21,4	2690	197	245
24	240	85	9,5	13	4230	33,2	22,3	3600	248	