Matematika 1

Sadržaj

Poglavlje 1

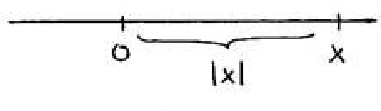
Realni i kompleksni brojevi

1.1 Realni brojevi

Skup realnih brojeva sadrži racionalne brojeve (razlomke) i iracionalne brojeve. Svaki element tog skupa može se prikazati u konačnom ili beskonačnom decimalnom zapisu, npr. 3.16, 4.5678, 1.333..., 9.131313..., a možemo ga zamišljati i kao točku na brojevnom pravcu.

Definicija: ***Apsolutna vrijednost realnog broja*** *geometrijski se definira kao udaljenost točke koja predstavlja taj broj od ishodišta na brojevnom pravcu (vidi Sliku 1.1) ili*

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{ako je} \quad x \geq 0 \\ -x & \textit{ako je} \quad x < 0. \end{cases}$$



Slika 1.1: Apsolutna vrijednost realnog broja

Zadatak 1.1: *Najprije geometrijski, a potom analitički (računski) riješite nejednadžbu* $|x-1| < 2$.

Rješenje. a) geometrijski: uz supstituciju $t = x - 1$ nejednadžba postaje $|t| < 2$, što znači da rješenje čine svi brojevi udaljeni od nule za manje od dva. Dakle, $x - 1$ mora biti udaljen od nule za manje od dva, tj. x je udaljen od 1 za manje od dva. Stoga je rješenje interval $\langle -1, 3\rangle$.

b) analitički: promatramo dva slučaja

$$\text{(i)}\ x-1\geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x-1|=x-1 \quad \Rightarrow \quad 1\leq x<3$$
$$\text{(ii)}\ x-1<0 \quad \Rightarrow \quad |x-1|=1-x \quad \Rightarrow \quad -1<x\leq 1.$$

Konačno rješenje je unija rješenja dobivenih u ova dva slučaja: $x \in \langle -1, 3\rangle$.

□

Zadatak 1.2: *Riješite nejednadžbu:*

$$|x+1|+|y-2|\leq 1.$$

Rješenje. Trebamo razmotriti četiri neovisna slučaja:

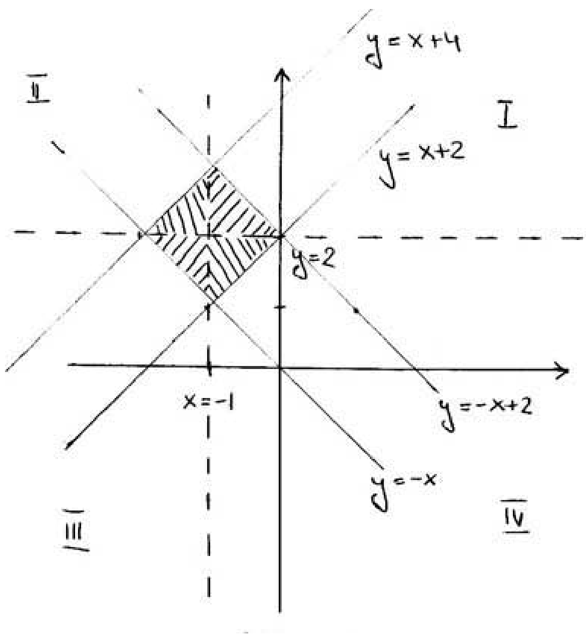
a) $x+1\geq 0,\ y-2\geq 0$ b) $x+1<0,\ y-2\geq 0$

c) $x+1\geq 0,\ y-2<0$ d) $x+1<0,\ y-2<0.$

Podijelimo koordinatnu ravninu pravcima $x=-1$ i $y=2$. Pogledajmo prvi "kvadrant", tj. slučaj a): zbog $|x+1|=x+1$ i $|y-2|=y-2$ nejednadžba sada glasi

$$x+1+y-2\leq 1 \quad \Rightarrow \quad y\leq -x+2.$$

Stoga u tom području crtamo pravac $y=-x+2$ i uzimamo područje ispod njega. Analogno se rješavaju i ostala tri slučaja (vidi Sliku 1.2). □



Slika 1.2: Rješenje Zadatka 1.2

1.2 Kompleksni brojevi

Definicija: ***Kompleksan broj*** *je veličina koja se može zapisati kao* $z = x + yi$ *gdje su* x *i* y *realni brojevi, a* i *imaginarna jedinica koja ima svojstvo da vrijedi* $i^2 = -1$. *Brojevi* x *i* y *se zovu* ***realni****, odnosno* ***imaginarni dio*** *broja* z. *Pišemo:*

$$x = Re(z), \quad y = Im(z).$$

Dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ *i* $z_2 = x_2 + y_2 i$ *su* ***jednaka****, tj. vrijedi* $z_1 = z_2$ *ako i samo ako su zadovoljene jednakosti* $x_1 = x_2$ *i* $y_1 = y_2$. *Dalje, definiramo* ***zbrajanje*** *i* ***množenje*** *kompleksnih brojeva:*

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) &= x_1 + y_1 + (x_2 + y_2)i, \\ (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) &= (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 + y_1)i. \end{aligned}$$

Ako je $z = x + yi$, *kažemo da je kompleksni broj* $\overline{z} = x - yi$ ***konjugiran*** *broju* z.

Napomena: *Uz identifikaciju* $x = x + 0 \cdot i$, *skup realnih brojeva možemo promatrati kao podskup skupa kompleksnih brojeva.*

Napomena: *Konjugiranje ima sljedeća svojstva:*

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$

c) $z + \overline{z} = 2Re(z), \ z - \overline{z} = 2iIm(z)$

d) $\overline{\overline{z}} = z$

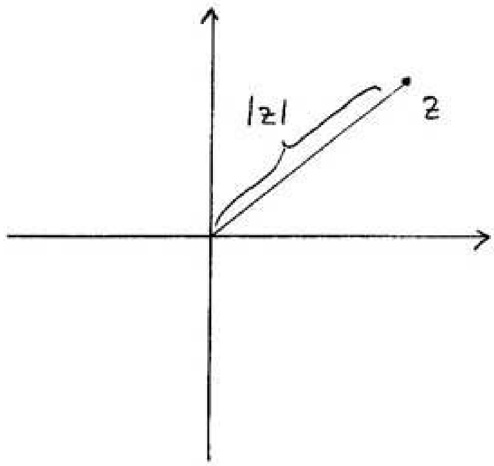
e) $z\overline{z}$ *je realan i pozitivan broj (osim za* $z = 0$ *kada je* $z\overline{z} = 0$*).*

Definicija: ***Apsolutna vrijednost*** *ili* ***modul****, u oznaci* $|z|$, *kompleksnog broja* $z = x + yi$ *definira se kao*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

U ***kompleksnoj ravnini*** *apsolutnu vrijednost možemo predočiti kao udaljenost točke* (x, y) *od ishodišta (vidi Sliku 1.3).*

Zadatak 1.3: *Neka je* z *kompleksan broj takav da je* $|z| = 1$. *Izračunajte* $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$.



Slika 1.3: Apsolutna vrijednost kompleksnog broja

Rješenje. Imamo:

$$\begin{aligned}
|1+z|^2+|1-z|^2 &= (1+z)\overline{(1+z)}+(1-z)\overline{(1-z)} = \\
&= (1+z)(\overline{1}+\overline{z})+(1-z)(\overline{1}-\overline{z}) = \\
&= (1+z)(1+\overline{z})+(1-z)(1-\overline{z}) = \\
&= 1+z+\overline{z}+z\overline{z}+1-z-\overline{z}+z\overline{z} = \\
&= 2+2|z|^2 = 4
\end{aligned}$$

□

Zadatak 1.4: *Riješite jednadžbe a) i b) te sustave jednadžbi c) i d):*

a) $|z+1| = |z+i|$,

b) $z^2+iz+1=0$,

c) $\left|\frac{z}{z+i}\right| = 1 \qquad i \qquad \frac{z}{i\overline{z}} = 1$,

d) $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$.

Rješenje. a) Uz oznaku $z = x+yi$ imamo

$$|x+1+yi| = |x+(y+1)i|.$$

Kvadriranjem slijedi:

$$(x+1)^2+y^2 = x^2+(y+1)^2$$

odnosno

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$$

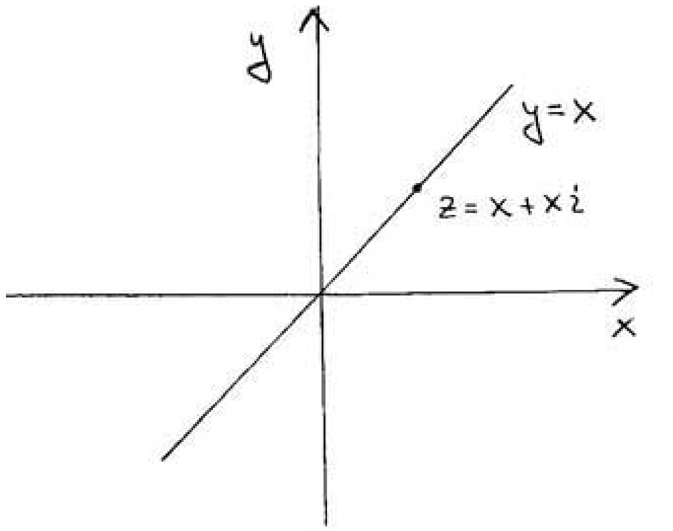
što nakon sređivanja daje

$$y = x$$

pa je skup rješenja

$$z = \{x + xi \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

U kompleksnoj ravnini rješenje predstavlja skup svih kompleksnih brojeva $z = x + yi$ koji leže na pravcu $y = x$. (vidi Sliku 1.4).



Slika 1.4: Prikaz rješenja Zadatka 1.4 a)

b) Uz oznaku $z = x + yi$ jednadžba postaje

$$x^2 - y^2 + 2xyi + i(x + yi) + 2 = x^2 - y^2 - y + 2 + (2xy + x)i = 0$$

pa slijedi

$$x^2 - y^2 - y + 2 = 0 \quad \text{i} \quad 2xy + x = 0.$$

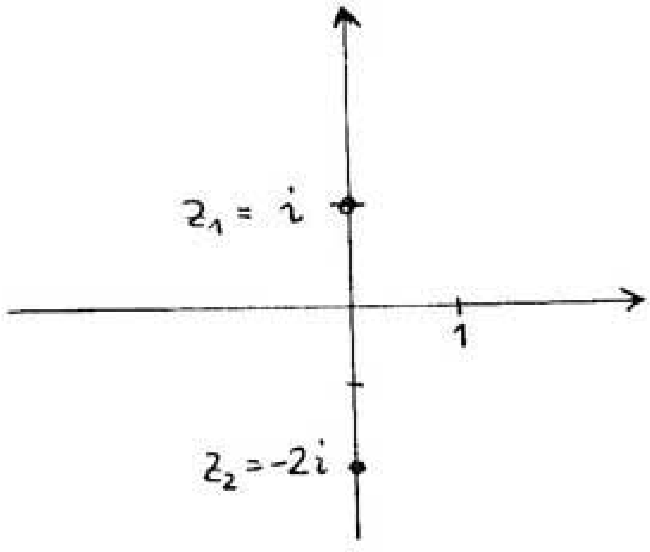
Iz druge jednakosti dobivamo $x = 0$ ili $y = -\frac{1}{2}$. Neka $x = 0$. U tom slučaju prva jednakost daje:

$$y^2 + y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1,\ y_2 = -2$$

Ako je $y = -\frac{1}{2}$, onda iz prve jednakosti dobivamo

$$x^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{9}{4}$$

što ne može biti jer je x realan. Stoga su jedina rješenja $z_1 = i$ i $z_2 = -2i$ (vidi Sliku 1.5).



Slika 1.5: Prikaz rješenja Zadatka 1.4 b)

c) Uz $z = x + yi$ imamo

$$|x + yi| = |x + (y + 1)i| \quad \text{i} \quad x + yi = ix + y.$$

Iz druge jednakosti slijedi da je $x = y$ pa prva jednakost daje

$$2x^2 = x^2+(x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = x^2+x^2+2x+1 \quad \Rightarrow \quad 2x+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Jedino rješenje je, dakle, $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

□

Zadatak 1.5: *Skicirajte u kompleksnoj ravnini brojeve koji zadovoljavaju sljedeće nejednadžbe:*

$$|z - i| \leq 1 \qquad i \qquad |z - 1| \leq 1.$$

Rješenje. Uvrstimo $z = x + yi$ i kvadrirajmo gornje nejednakosti. Dobivamo

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1 \quad \text{i} \quad (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$$

pa je rješenje presjek krugova $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ i $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$. (vidi Sliku 1.6)

□

Zadatak 1.6: *Geometrijski prikažite rješenja sljedeće nejednadžbe:*

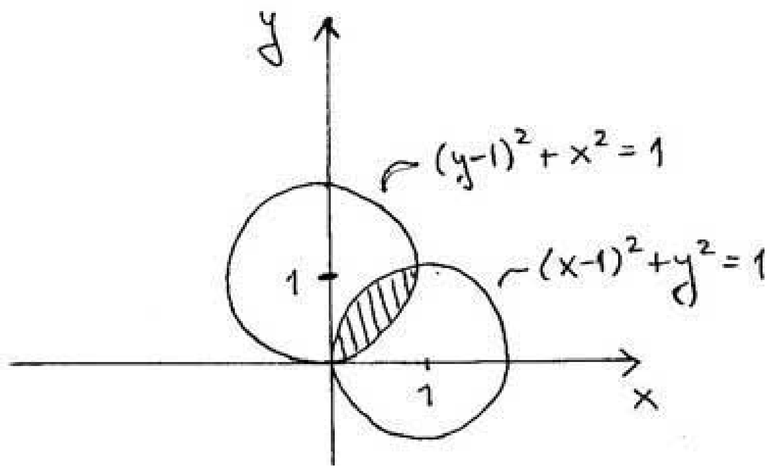
$$Re((1 + i)z) \geq 0.$$

Rješenje. Imamo

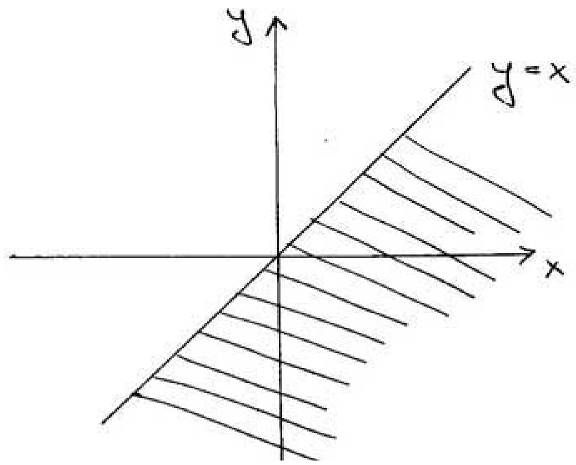
$$(1 + i)z = (1 + i)(x + yi) = x + yi + xi - y = x - y + (x + y)i,$$

odakle slijedi $Re((1 + i)z) = x - y \geq 0$ pa je rješenje poluravnina $y \leq x$ (vidi Sliku 1.7).

□



Slika 1.6: Prikaz rješenja Zadatka 1.5



Slika 1.7: Prikaz rješenja Zadatka 1.6

1.3 Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

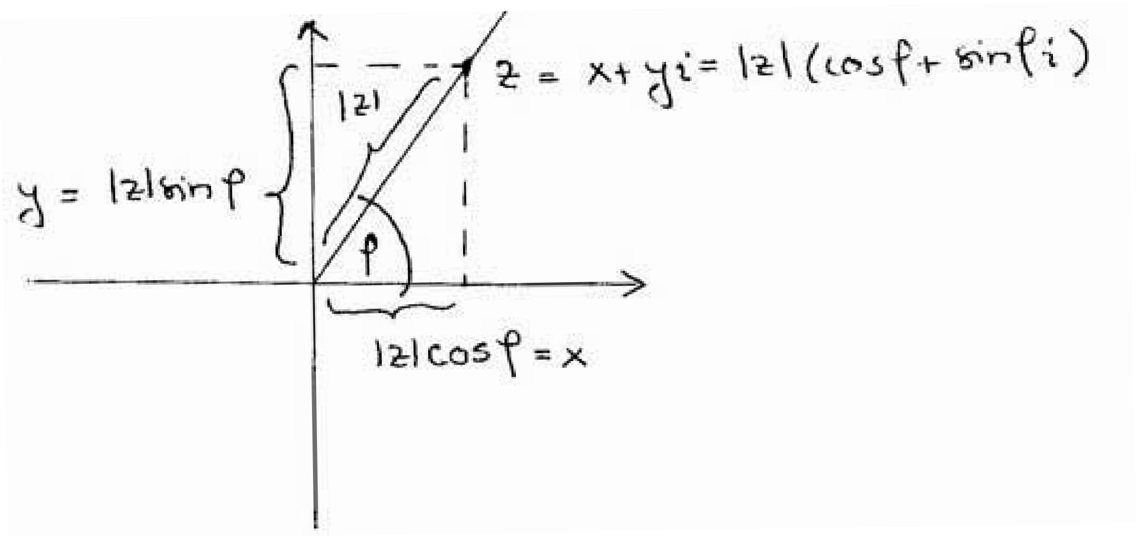
Definicija: *Za proizvoljan kompleksan broj* $z = x+yi$ *(različit od nule) je apsolutna vrijednost broja* $z \setminus |z|$ *jednaka jedan. Slijedi da postoji kut* φ *takav da vrijedi*

$$\frac{z}{|z|} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

tj.

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ovaj zapis kompleksnog broja zovemo ***polarni*** *ili* ***trigonometrijski prikaz*** *broja* z*, a* $(|z|, \varphi)$ *zovemo* ***polarnim koordinatama*** *kompleksnog broja. Pri tome je* φ ***argument****,* $arg(z)$*, a* $|z|$ ***modul*** *broja* $|z|$ *(vidi Sliku 1.8).*



Slika 1.8: Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Napomena: *Dva kompleksna broja u trigonometrijskom prikazu* $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *i* $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *su jednaka ako i samo ako vrijedi*

$$|z_1| = |z_2| \qquad i \qquad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,$$

gdje je $k \in \mathbb{Z}$.

Teorem: *Vrijedi slijedeća formula za* ***množenje*** *dva kompleksna broja u trigonometrijskom zapisu:*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Napomena: *Prethodna formula pokazuje nam i kako se kvadrira kompleksan broj u trigonometrijskom zapisu: ako uvrstimo* $z_1 = z_2 = z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *dobivamo*

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

što se lako poopćuje do formule za ***potenciranje*** *kompleksnih brojeva u trigonometrijskom zapisu:*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

za n proizvoljan prirodan broj.

Teorem: *Za* ***dijeljenje*** *dva kompleksna broja u trigonometrijskom zapisu vrijedi slijedeća formula:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Zadatak 1.7: *Izračunajte:*

a) $(1-i)^{15}$ *b)* $(1+i\sqrt{3})^7$.

Rješenje. a) Najprije broj $|z| = 1 - i$ zapisujemo u trigonometrijskom obliku:

$$|z| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

pa zaključujemo da je

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{7\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right].$$

Sada imamo

$$z^{15} = \left[\sqrt{2}\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right]\right]^{15} = \sqrt{2}^{15}\left[\cos\frac{15\cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{15\cdot 7\pi}{4}\right].$$

Primijetimo da je $15 \cdot 7 = 105 = 26 \cdot 4 + 1$ (koristimo svojstvo periodičnosti trigonometrijskih funkcija) pa je

$$z^{15} = \sqrt{2}^{15}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}^{15}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = 2^7 + 2^7 i.$$

b)

$$|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Sad imamo da je $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, a $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pa slijedi $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Stoga je

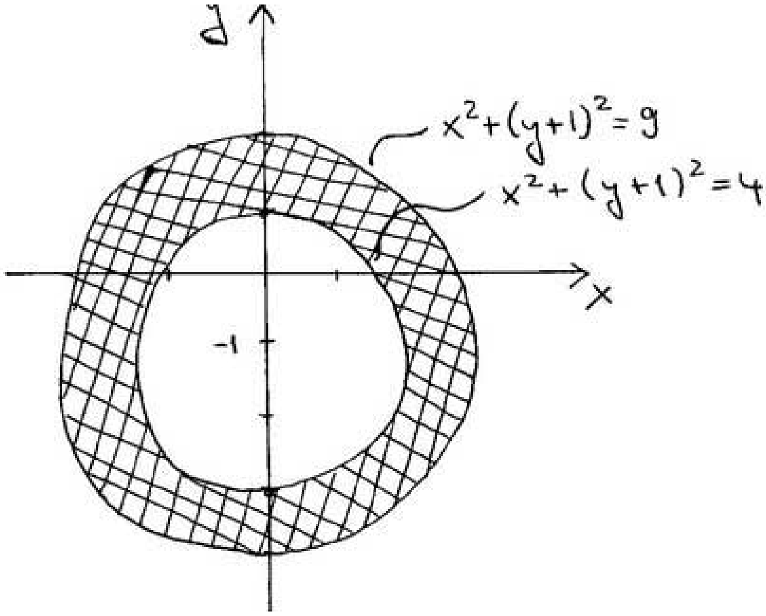
$$z^7 = 2^7\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^7 = 2^7\left[\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right].$$

Ovdje imamo $7 = 2 \cdot 3 + 1$ pa zbog periodičnosti možemo pisati

$$z^7 = 2^7\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2^7\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = 2^6(1 + \sqrt{3}i).$$

□

Zadatak 1.8: *Predočite grafički skup kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju sustav nejednadžbi:* $2 \leq |iz - 1| \leq 3$.



Slika 1.9: Prikaz rješenja Zadatka 1.8

Rješenje. Uvrstimo $z = x + yi$:

$$2 \leq |ix - y - 1| \quad \text{i} \quad |ix - y - 1| \leq 3.$$

Nakon kvadriranja imamo:

$$4 \leq (y+1)^2 + x^2 \quad \text{i} \quad (y+1)^2 + x^2 \leq 9.$$

Riječ je o kružnom vijencu omeđenom kružnicama $x^2+(y+1)^2 = 4$ i $x^2+(y+1)^2 = 9$ (vidi Sliku 1.9). □

Zadatak 1.9: *Predočite grafički sljedeće skupove kompleksnih brojeva:*

a) $\left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1$

b) $\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| \geq 1$

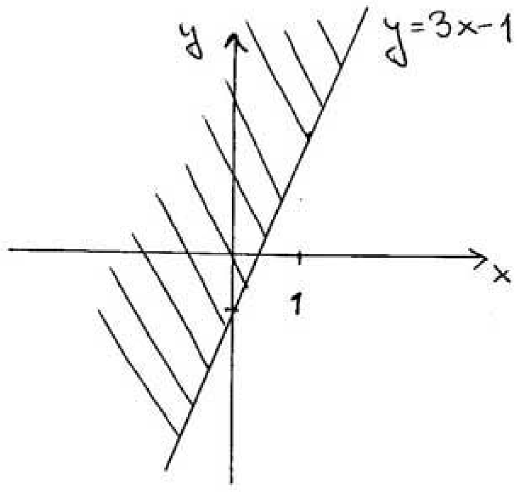
c) $\left|\frac{z+2-i}{z+i}\right| \leq 1.$

Rješenje. b) Imamo

$$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |z-2| \geq |z+1-i|.$$

Uvrštavanjem $z = x + yi$ i kvadriranjem slijedi:

$$(x-2)^2+y^2 \geq (x+1)^2+(y-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+4+y^2-x^2-2x-1-y^2+2y-1 \geq 0$$



Slika 1.10: Prikaz rješenja Zadatka 1.9 b)

odnosno

$$-6x + 2y + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq 3x - 1.$$

Rješenje je dano područjem iznad pravca $y = 3x - 1$ (vidi Sliku 1.10).

$\square$

Poglavlje 2

Dvodimenzionalni, trodimenzionalni i n-dimenzionalni realni vektorski prostor

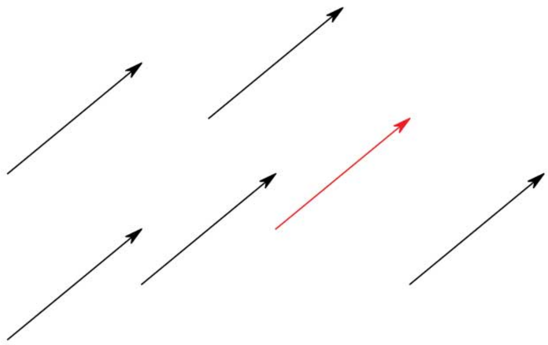
2.1 Vektori

Definicija: *Dužinu* $\overline{AB}$ *zovemo* ***usmjerena dužina*** *ako ima uređene rubne točke, tj. zna se koja je početna, a koja krajnja točka. Označavamo je s* $\overrightarrow{AB}$. *Dvije usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{CD}$ *su* ***ekvivalentne*** *ako dužine* $\overline{AD}$ *i* $\overline{BC}$ *imaju zajedničko polovište.* ***Vektor*** *je skup svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina, a označavamo ih slovima* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$.

Napomena: *Uobičajeno je da, kada govorimo o vektoru, ne mislimo na sve svih međusobno ekvivalente usmjerene dužine, već na* ***samo jednog predstavnika tog skupa****, tj. na konkretnu usmjerenu dužinu. Na primjer, usmjerenu dužinu* $\overrightarrow{AB}$ *zovemo vektorom* $\overrightarrow{AB}$*, a pritom mislimo na* ***sve*** *usmjerene dužine koje su ekvivalentne usmjerenoj dužini* $\overrightarrow{AB}$. *U tom smislu ćemo pisati* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *(vidi Sliku 2.1).*

Definicija: ***Duljina*** *ili* ***modul*** *vektora* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *definira se kao dujina dužine* $\overline{AB}$*, tj. kao duljina bilo kojeg predstavnika tog vektora. Pišemo:* $|\vec{a}|$.
Vektore duljine 1 zovemo ***jedinični vektori****.*
Nul-vektor *je vektor koji ima duljinu nula, tj. vektor koji ima početak i kraj u istoj točki. Smjer i orijentacija ovog vektora se ne definiraju. Nul-vektor označavamo s* $\vec{0}$*, a njegovi predstavnici su sve usmjerene dužine oblika* $\overrightarrow{AA}$*, tj. sve takve usmjerene dužine kojima se početna i krajnja točka podudaraju.*

Definicija: *Za vektore čiji predstavnici leže na istom ili na paralelnim pravcima kažemo da su istog* ***smjera****. Za dva vektora koji leže na istom pravcu ili paralelnim*



Slika 2.1: Vektor je klasa međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina, a za predstavnika možemo uzeti bilo koju od njih.

pravcima kažemo da su ***kolinearni****. Za svaka dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ možemo pronaći predstavnike $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, gdje je O fiksna točka prostora. Ako se točke A i B nalaze s iste strane točke O, kažemo da su ti vektori* ***iste orijentacije****. Ako to nije slučaj, kažemo da su vektori* ***suprotne orijentacije****.*

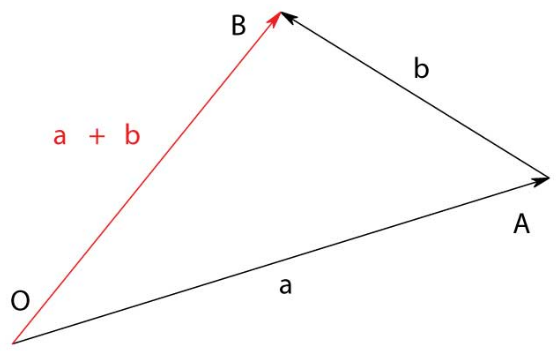
Definicija: *Za zadani vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ možemo definirati vektor $-\vec{a} := \overrightarrow{BA}$. To je vektor kojeg zovemo* ***suprotni vektor*** *i koji ima istu duljinu i smjer, ali suprotnu orijentaciju od zadanog vektora.*

Napomena: *Svaki vektor jedinstveno je određen duljinom, smjerom i orijentacijom.*

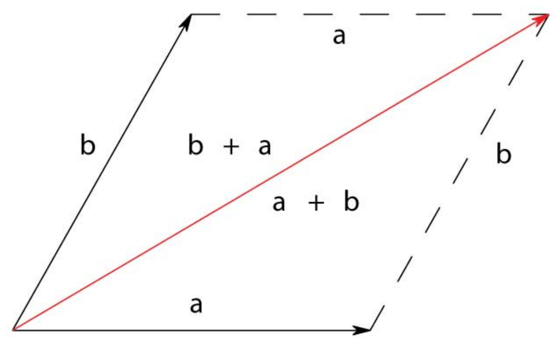
Definicija: ***Zbroj vektora*** *$\vec{a} + \vec{b}$ je vektor koji se dobije na sljedeći način: odaberimo proizvoljnu fiksnu točku O i nađimo točke A i B takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ zovemo zbrojem vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dakle, zbroj vektora definira se kao vektor koji ima početak u početnoj točki prvog vektora, a kraj u krajnjoj točki drugog vektora u zbroju (vidi Sliku 2.2). Ovu definiciju zovemo* ***pravilo trokuta****. Zapisano simbolički, zbrajanje glasi: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.*

Napomena: *Važno svojstvo zbrajanja vektora je* ***komutativnost****, slikovno izraženo* ***pravilom paralelograma*** *(vidi Sliku 2.3): Ako vektoru $\vec{a}$ po pravilu trokuta dodamo vektor $\vec{b}$, dobijemo dijagonalu $\vec{a}+\vec{b}$ zamišljenog paralelograma određenjog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. No, u tom paralelogramu možemo poći i od vektora $\vec{b}$, kojem po pravilu trokuta dodajemo $\vec{a}$, čime dolazimo do iste dijagonale, ali ona ovog puta čini vektor $\vec{b} + \vec{a}$, što očito dokazuje komutativnost zbrajanja vektora.*
Pravilo paralelograma se pomoću svojstva asocijativnosti zbrajanja može proširiti do ***pravila mnogokuta*** *za zbrajanje vektora.*

Definicija: *Vektor možemo* ***množiti skalarom****, tj. zadanim realnim brojem. Za skalar λ i vektor $\vec{a}$ definiramo produkt $\lambda \cdot \vec{a}$ kao vektor koji ima sljedeća svojstva:*



Slika 2.2: Pravilo trokuta za zbrajanje vektora



Slika 2.3: Pravilo paralelograma za zbrajanje vektora

a) ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\lambda = 0$, onda je $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$

b) ako je $\vec{a} \neq 0$ i $\lambda = 0$, onda je $\lambda \cdot \vec{a}$ vektor određen sljedećim:

(a) duljina: $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

(b) smjer: jednak smjeru vektora $\vec{a}$

(c) orijentacija: ako je $\lambda < 0$, orijentacija je suprotna orijenaciji vektora $\vec{a}$, a ako je $\lambda > 0$, orijentacija je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$.

Definicija: ***Linearna kombinacija*** *vektora $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ i skalara $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ je vektor $\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{a_n}$. Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ zovemo* ***koeficijenti*** *linearne kombinacije.*

Definicija: *Vektori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ su* ***linearno zavisni*** *ako postoje skalari λ_1, λ_2, ..., λ_n (koji nisu svi nula!) takvi da je $\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$. Ako takvi skalari ne postoje, tj. ako $\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ nužno povlači $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, kažemo da su vektori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$* ***linearno nezavisni****.*

Napomena: *Čest je i bitan problem zadani vektor $\vec{a}$ napisati kao linearnu kombinaciju zadanih linearno nezavisnih vektora.*

Zadatak 2.1: *Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je E sjecište dijagonala, F polovište stranice $\overline{BC}$, a G polovište stranice $\overline{CD}$. Izračunajte vektore $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{FD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.*

Rješenje.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BF} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{EF} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

□

Zadatak 2.2: *Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i točka C na pravcu kroz A i B, te proizvoljna točka O. Izrazite $\overrightarrow{OC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ ako je $|\overline{AC}| = 2|\overline{BC}|$ i:*

a) $C \in \overline{AB}$

b) $C \notin \overline{AB}$.

Rješenje. Uputa: napišite $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$, gdje je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Koristeći $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ iz te jednakosti izrazite $\overrightarrow{AC}$. □

Zadatak 2.3: *Neka je T težište trokuta ABC, a O prozvoljna točka. Izrazite vektor $\overrightarrow{OT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$.*

Rješenje. Sa Slike 2.4 očito slijedi:

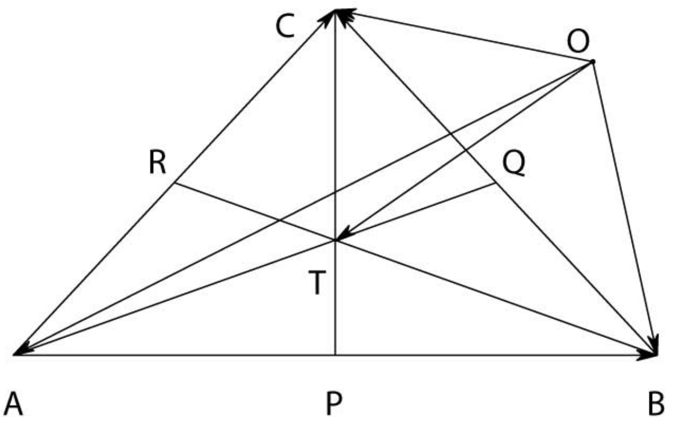
$$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobije se

$$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) = \vec{0}, \text{ tj.}$$



Slika 2.4: Težište trokuta - Zadatak 2.3

$$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (*).$$

Želimo pokazati da je $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$. U tu svrhu računamo $\overrightarrow{TA}$, pritom koristeći činjenicu da težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$ (računajući od vrha):

$$\overrightarrow{TA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{QA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}.$$

Analogno se dobiva $\overrightarrow{TB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{TC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Zbrajanjem ove tri jednakosti daju $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$, što uvrštanjem u jednakost $(*)$ daje $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. □

Zadatak 2.4: *Neka su A, B, C, D bilo koje četiri točke prostora. Ako su točke K, L, M, N redom polovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, dokažite da je tada $KLMN$ paralelogram.*

Rješenje. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$. Očito je

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

S druge strane je

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d},$$

odakle dobivamo

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{0},$$

tj. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$, dakle $KLMN$ jest paralelogram. □

Zadatak 2.5: *Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je E sjecište dijagonala, F polovište stranice $\overline{BC}$, a G polovište stranice $\overline{CD}$. Izrazite vektore $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{FD}$ pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AE}$.*

Rješenje.

$$\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{BC} = -1\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{BF} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{FD} = -\tfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$

□

2.2 Analitički prikaz vektora

Definicija: *Neka je u prostoru zadan pravokutni koordinatni sustav s tri u parovima okomite osi x, y i z. Uočimo na osi x, y i z jedinične vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ s početkom u ishodištu, a krajevima u točkama $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$, redom. Ova tri vektora zovemo* ***koordinatnim vektorima u prostoru*** *(crveno označeni vektori na Slici 2.5).*

Definicija: *Vektor $\vec{v}$ s početkom u ishodištu, a krajem u točki $T = (a,b,c)$, može se na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija koordinatnih vektora. Uz oznake kao na Slici 2.5 imamo*

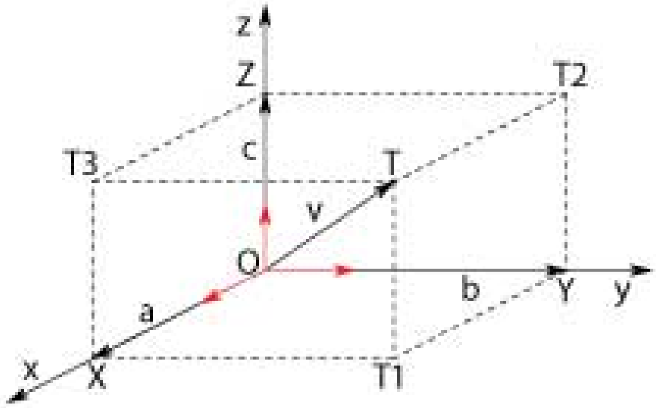
$$\vec{v} = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{T_1T} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Ovaj prikaz vektora zovemo ***koordinatni*** *ili* ***analitički prikaz***. *Drugi mogući zapis je pomoću stupčane matrice (vidi Poglavlje 4):*

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Napomena: *Postoji i analitička formula za vektor zadan početnom točkom $T_1(a_1, b_1, c_1)$ i završnom točkom $T_2(a_2, b_2, c_2)$. Možemo pisati*

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1O} + \overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k} - (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}),$$



Slika 2.5: Koordinatizacija vektora u prostoru

što daje sljedeću formulu za vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$*:*

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (a_2 - a_1)\vec{i} + (b_2 - b_1)\vec{j} + (c_2 - c_1)\vec{k}.$$

U matričnom zapisu formula glasi:

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \\ c_2 - c_1 \end{bmatrix}.$$

Teorem: *Za dane vektore* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *te skalar* λ *vrijede sljedeće formule:*

jednakost vektora: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

zbrajanje vektora: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$

množenje vektora skalarom: $\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{i} + \lambda a_2\vec{j} + \lambda a_3\vec{k}$

modul vektora: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

kriterij kolinearnosti: $\vec{a}$ *kolinearan* $\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Napomena: *Postupak koordinatizacije vektora se mogao provesti i u dvije dimenzije ili pak proizvoljno mnogo (n) dimenzija.*

Zadatak 2.6: *Zadana su tri vrha paralelograma* $ABCD$*:* $A(-2,-1,1)$*,* $B(4,-2,2)$ *i* $C(6,1,3)$*. Odredite koordinate točke* D*.*

Rješenje. U paralelogramu vrijedi jednakost vektora $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Ako označimo $D = (x, y, z)$, imamo

$$(6-x)\vec{i}+(1-y)\vec{j}+(3-z)\vec{k}=(4+2)\vec{i}+(-2+1)\vec{j}+(2-1)\vec{k}$$
$$(6-x)\vec{i}+(1-y)\vec{j}+(3-z)\vec{k}=6\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},$$

odakle (iz jednakosti vektora s lijeve i s desne strane jednakosti) odmah slijedi rješenje: $D=(0,2,2)$. Zadatak se može riješiti i u matričnom zapisu - iz jednakosti $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ slijedi

$$\begin{bmatrix}6\\1\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}6\\1\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-1\\1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}6\\1\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix},$$

odakle očitavamo da je $D(0,2,2)$. □

Zadatak 2.7: *Napišite završnu točku vektora $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, ako je početna točka tog vektora dana s $(1,2,-2)$.*

Rješenje. Označimo koordinate završne točke vektora $\vec{a}$ s (x,y,z) i koristimo formulu za vektor zadan koordinatama početne i završne točke:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}=\vec{a},$$

pa dobivamo

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\-6\end{bmatrix},$$

tj. završna točka vektora $\vec{a}$ glasi $(3,5,-6)$. □

Zadatak 2.8: *Napišite završnu točku vektora kojem je početna točka $(1,1,1)$, a dva puta je dulji od vektora s početnom točkom $(-1,2,3)$ i završnom točkom $(0,1,-2)$.*

Rješenje. Označimo prvi vektor s $\vec{a}$, drugi vektor s $\vec{b}$, a početnu točku vektora $\vec{a}$ s (x, y, z). Iz $\vec{a} = 2\vec{b}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix},$$

tj. završna točka vektora $\vec{a}$ glasi $(3, -1, -9)$. □

Zadatak 2.9: *Nađite točku B orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ takve da je $A(1, 2, 3)$, a $P(2, 3, 7)$ je polovište dužine $\overline{AB}$.*

Rješenje. Kako je P polovište dužine $\overline{AB}$, to je $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP}$. Ako označimo $B(x, y, z)$ mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix},$$

dakle završna točka glasi $B(3, 4, 11)$. □

Napomena: *Prethodni zadatak nam daje ideju da izvedemo formulu za koordinate polovišta P dužine $\overline{T_1T_2}$ dane s $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$. Označimo najprije $P(x, y, z)$. Iz jednakosti vektora $\overrightarrow{T_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{T_1T_2}$ slijedi*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix})$$

slijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je ***polovište dužine*** $\overline{T_1T_2}$ *dane s* $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_1, y_2, z_2)$ *dano s*

$$P(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}).$$

Slično se može izvesti formula za ***težišta trokuta*** $T_1T_2T_3$ *zadanog s* $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$*:*

$$T(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}).$$

Zadatak 2.10:

a) Provjerite koja dva od vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ *su kolinearni.*

b) Nađite realne brojeve x i y tako da vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ *i* $\vec{b} = 3\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ *budu kolinearni.*

Rješenje.

a) Po kriteriju za kolinearnost lako dobivamo da za $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{3}{-1},$$

što znači da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Isto se tako vidi da $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu kolinearni. No, za $\vec{a}$ i $\vec{c}$ imamo

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6},$$

pa su vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ kolinearni.

b) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako vrijedi

$$\frac{-1}{3} = \frac{2}{x} = \frac{-1}{y},$$

što je sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Lako dobivamo da je $x = -6$ i $y = 3$.

$\square$

Zadatak 2.11: *Prikažite vektor* $\vec{c} = -4\vec{j} - 3\vec{k}$ *kao linearnu kombinaciju vektora* $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ *i* $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$*.*

Rješenje. Prikazati $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ znači naći koeficijente α i β tako da vrijedi

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Vidimo da dobivamo sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 3\alpha + \beta &= 0 \\ -\alpha + \beta &= -4 \\ \beta &= -3. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $\beta = -3$ u prvu jednadžbu dobivamo da je $3\alpha = 3$, tj. $\alpha = 1$. Uvrštavanjem $\beta = -3$ i $\alpha = 1$ provjeravamo da je rješenje dobro. Dakle, dobili smo sljedeći prikaz $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}.$$

□

Napomena: *Primijetimo da u prethodnom zadatku rješenje koje smo dobili iz prve i treće jednadžbe nije moralo zadovoljavati i drugu jednadžbu. Da se to dogodilo zaključili bismo da* $\vec{c}$ *nije moguće prikazati kao linearnu kombinaciju vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*. To općenito i jest tako: da bismo prikazali općeniti vektor prostora kao linearnu kombinaciju vektora, potrebna su nam najmanje* ***tri*** *vektora (zato i imamo tri koordinatna vektora* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *i* $\vec{k}$*).*

Zadatak 2.12: *Prikažite vektor* $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ *pomoću vektora* $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ *i* $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$*.*

Rješenje. Tražimo koeficijente α, β i γ tako da vrijedi

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Imamo sada

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + 2\beta + 4\gamma \\ -3\alpha + 4\beta + 2\gamma \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma \end{bmatrix}.$$

Dobivamo sljedeći sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta + 4\gamma &= 2 \\ -3\alpha + 4\beta + 2\gamma &= 3 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma &= 3. \end{aligned}$$

Jedinstveno rješenje je dano s $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$, tako da je

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}.$$

$\square$

Poglavlje 3

Zapis nekih transformacija ravnine i prostora - pojam matrice i linearnog operatora

3.1 Translacija

Definicija: ***Translaciju*** *trodimenzionalnog prostora zadajemo* ***vektorom translacije*** $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. *Vektor translacije svaku točka prostora* $T(x, y, z)$ *translatira u novu točku* $T'(x', y', z')$, *koju ponekad zovemo i slika točke* T *pri zadanoj translaciji (ili, općenito, zadanoj transformaciji). Koordinate točke* T' *lako računamo iz jednakosti* $\overrightarrow{TT'} = \vec{v}$. *Dolazimo do sljedeće formule:*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{bmatrix}.$$

Napomena: *Translaciju smo mogli promatrati i u ravnini. Formula bi u tom slučaju bila analogna gornjoj, naravno uz redukciju broja koordinata s tri na dvije.*

Zadatak 3.1: *Nađite točku dobivenu translacijom točke* $(-1, 0, 5)$ *za vektor* $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Rješenje. Označimo traženu točku $T'(x', y', z')$. Prema formuli za translaciju imamo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

tj. koordinate točke T' glase $(2, 2, 4)$. □

Zadatak 3.2: *Nađite vektor translacije koji prevodi točku* $(2, 1, 3)$ *u točku* $(1, 1, 2)$.

Rješenje. Označimo traženi vektor s $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Koristeći gornju formulu imamo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

pa slijedi

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

tj. traženi vektor translacije glasi $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{k}$. □

3.2 Rotacija

Napomena: *Promatrat ćemo dva slučaja rotacije: u ravnini oko ishodišta za zadani kut rotacije te u prostoru oko neke istaknute koordinatne osi, također za zadani kut rotacije.*

Definicija: ***Rotacija ravnine*** *oko ishodišta za kut α (u pozitivnom smjeru - smjeru suprotnom kretanju kazaljke sata) zadana je* ***matricom rotacije***

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Ukoliko želimo pronaći točku $T'(x', y')$ dobivenu rotacijom točke $T(x, y)$ oko ishodišta za kut α, koristimo sljedeću formulu:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Napomena: *S desne strane gornje formule pojavljuje se množenje matrica. Više o matricama i njihovom množenju možete pronaći u Poglavlju 4.*

Primjer 3.3: *Za neke specijalne kuteve imamo i specijalne transformacije ravnine, npr. za kut $\alpha = 0°$ dobivamo*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ovu matricu nazivamo jediničnom matricom (reda dva) zbog svojstva da ne mijenja stupčani vektor, što odgovara činjenici da rotacija za kut $\alpha = 0°$ ne mijenja koordinate točki ravnine:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot 1 + y \cdot 0 \\ x \cdot 0 + y \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

S druge strane, za $\alpha = 180^\circ$ imamo

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

pa vidimo da množenjem ovom matricom točka $T(x,y)$ (tj. njoj pripadajuća stupčana matrica) prelazi u točku $T'(x',y') = T'(-x,-y)$. Provjerite ovu tvrdnju sami i uočite geometrijski razlog zašto je tome tako (rotacija u ovom slučaju predstavlja zrcaljenje obzirom na ishodište).

Zadatak 3.4: *Zapišite matrice rotacija u ravnini oko ishodišta za sljedeće kuteve:*

a) $\alpha = 45^\circ$

b) $\alpha = 150^\circ$

c) $\alpha = 300^\circ$. *Izračunajte sliku točke $T(-2,4)$ pri ovim rotacijama!*

Rješenje.

c) Koristimo formulu za matricu rotacije:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Dalje, računamo sliku T' točke T:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 4\cdot\frac{1}{2} \\ -2\cdot(-\frac{1}{2}) + 4\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 1-2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Dakle, rješenje je $T'(\sqrt{3}+2, 1-2\sqrt{3})$.

$\square$

Napomena: *Prikažite grafički rotaciju iz prethodnog zadatka - u ravninskom koordinatnom sustavu prikažite točke T i T' i uvjerite se da kut čiji su krakovi u tim točkama, a vrh u ishodištu, odgovara zadanom kutu rotacije!*

Zadatak 3.5: *Za koji kut treba rotirati točku $(2,2)$ da bismo dobili točku $(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$? Napišite matricu te transformacije!*

Rješenje. Treba vrijediti:

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\alpha - 2\sin\alpha \\ 2\sin\alpha + 2\cos\alpha \end{bmatrix},$$

odakle dolazimo do sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha - 2\sin\alpha &= -1-\sqrt{3} \\ 2\sin\alpha + 2\cos\alpha &= -1+\sqrt{3} \end{aligned}$$

čije rješenje glasi $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, odakle vidimo da je $\alpha = 120^\circ$. $\square$

Definicija: *U trodimenzionalnom prostoru također možemo promatrati rotaciju za zadni kut α, ali ta* ***rotacija prostora*** *ne može biti oko ishodišta (jer ne bi bila dobro zadana), već oko nekog istaknutog pravca, najčešće neke od koordinatnih osi. Matrice rotacije za kut α oko x, y i z-osi, redom, glase ovako:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3.6: *Napišite matricu prostorne rotacije oko $y-$osi za kut $\alpha = 240°$ te nađite sliku točke $T(0, 3, -2)$ obzirom na tu transformaciju.*

Rješenje. Koristimo srednju matricu iz gornje definicije i dolazimo do sljedeće matrice rotacije:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 240° & 0 & -\sin 240° \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 240° & 0 & \cos 240° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

što daje sljedeću sliku $T'(x', y', z')$ točke T:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

3.3 Simetrija i projekcija

Definicija: *Centralna* ***simetrija ravnine*** *obzirom na ishodište koordinatnog sustava zadana je matricom*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Osim centralne simetrije, gledamo i dvije osne simetrije i to obzirom na koordinatne osi x i y, čije matrice redom glase

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje, možemo promatrati više ***simetrija prostora****: jednu centralnu*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

tri osne (obzirom na koordinatne osi x, y i z)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

te tri simetrije obzirom na koordinatne ravnine xy, xz i yz, čije matrice redom glase

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Napomena: *Primijetite da je su u matričnom zapisu simetrije na dijagonali matrice brojke* 1 *ili* -1, *ovisno o tome o kojoj se simetriji radi, dok su nedijagonalni elementi tih matrica nule. Matrice je najlakše zapamtiti tako da zamislimo kako prvi element matrice "pripada" x-koordinati, drugi y-koordinati (te treći $z-$koordinati ukoliko se radi o simetriji trodimenzionalnog prostora). Pritom su jednaki* 1 *oni dijagonalni elementi koji odgovaraju koordinati (ili koordinatama) objekta obzirom na kojeg se izvodi simetrija, dok su preostali elementi jednaki* -1. *Brojka* 1 *na dijagonali sugerira da se odgovarajuća koordinata točke pri simetriji neće promijeniti, dok* -1 *govori da će se odgovarajuća koordinata promijeniti u suprotnu.*

Napomena: *Za svaku o gore opisanih simetrija možemo promatrati i pripadne* ***projekcije****, čije pripadne matrice dobivamo tako da u odgovarajućoj matrici simetrije sve elemente koji su jednaki* -1 *zamijenimo nulama, dok elemente jednake* 1 *ostavljamo nepromijenjenima.*

Primjer 3.7: *Matrica prostorne projekcije na koordinatnu ravninu xz glasi:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ova matrica sugerira da će slika T' projekcije točke $T(x,y,z)$ na $xz-$ravninu glasiti $T'(x,0,z)$.

Zadatak 3.8: *Napišite matrice sljedećih transformacija prostora:*

a) simetrija obzirom na $xz-$ravninu

b) projekcija na $y-z$ ravninu,

te ih primijenite redom na sljedeće točke:

1) $(1,1,1)$

2) $(2,-1,4)$.

Rješenje.

a2) Matrica simetrije obzirom na $xz-$ravninu glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa je slike $T'(x', y', z')$ točke $(2, -1, 4)$ dana s

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

□

3.4 Matrice i linearni operatori

Napomena: *Matrice koje predstavljaju rotacije, simetrije i projekcije su primjeri* ***kvadratnih matrica****, tj. matrica koje imaju jednak broj* ***redaka*** *i* ***stupaca****. Kvadratne matrice predstavljaju transformacije ravnine u ravninu ili prostora u prostor, tj. takve transformacije koje ne mijenjaju dimenziju prostora kojeg promatramo. No, to ne mora biti tako i općenito: možemo promatrati i transformacije koje preslikavaju ravninu u prostor ili prostor u ravninu. Takve transformacije će i dalje biti predstavljene matricama (pod uvjetom da su* ***linearne****, tj. da je transfromacijski odnos među koordinatama linearan), ali te matrice više neće biti kvadratne.*
Više o vezi matrica i linearnih transformacija možete pronaći u posljednjem odlomku Poglavlja 4.

Primjer 3.9: *Matrica*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

predstavlja primjer linearne transformacije prostora u ravninu: slika točke $T(1, -1, 4)$ bit će točka $T'(x', y')$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + (-7) \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 28 \end{bmatrix},$$

tj. vidimo da je točka T prostora preslikana u točku ravnine T'.

Napomena: *Općenito, linearna preslikavanja na vektorskim prostorima zovemo* ***linearni operatori****. Mi se ovdje njima nećemo baviti, dovoljno je da zapamtimo da su linearni operatori predstavljeni matricama, a mi ih možemo zamišljati kao linearne transformacije opisane u gornjoj napomeni.*

Poglavlje 4

Algebra matrica. Inverzna matrica. Determinanta

4.1 Definicija matrice

Definicija: *Neka su m i n prirodni brojevi. Shema u kojoj familiju A realnih brojeva a_{ij} $(i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\})$ zapisujemo na sljedeći način*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

*zove se **matrica** od **m redaka** i **n stupaca**, tj. matrica **tipa m × n**. Za element a_{ij} kažemo da dolazi na mjestu (i,j) u matrici A. Matricu zapisujemo i ovako: $A = (a_{ij})$.*
*Brojevi $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ čine **prvi redak**, a_{21}, a_{22}, $\ldots$, a_{2n} **drugi redak**, a_{m1}, a_{m2}, $\ldots$, a_{mn} **m-ti redak** matrice A. Brojevi $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ čine **prvi stupac**, $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}$ **drugi stupac**, a $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$ **n-ti stupac** matrice A.*

Napomena: *Dvije matrice su **jednake** ako su istog tipa i odgovarajući elementi su im jednaki.*

Definicija: *Za matricu kažemo je **kvadratna matrica** ako ima jednako mnogo redaka i stupaca (kažemo da je **reda** n, gdje je n broj redaka, odnosno stupaca).*
*Kvadratnu matricu A zovemo **dijagonalnom** ako je oblika*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ čine **glavnu dijagonalu** matrice A.*
***Jedinična matrica** I je takva dijagonalna matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki 1, a **nul-matrica** O je dijagonalna matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki 0 (možemo jednostavnije reći da su svi elementi nul-matrice jednaki nuli).*

Primjer 4.1: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *je jedinična matrica reda 3, a* $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *nul-matrica reda 2.*

4.2 Matrične operacije

Definicija: ***Zbroj matrica** moguće je definirati samo među matricama **istog tipa**: za $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $C = (c_{ij})$ tipa $m \times n$ s elementima $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, što znači da se zbrajaju elementi na istim pozicijama.*

Primjer 4.2:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1+2 & 3+(-1) & 2+5 \\ -1+(-3) & 0+(-1) & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definicija: ***Množenje matrice** $A = (a_{ij})$ **skalarom** λ daje matricu $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.*

Primjer 4.3:

$$(-3)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)\cdot 2 & (-3)\cdot(-1) & (-3)\cdot 3 \\ (-3)\cdot 0 & (-3)\cdot 1 & (-3)\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4.4: *Izračunajte $A + 2B$ za sljedeće matrice (ako postoji):*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned} A+2B &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Tražena matrica ne postoji, jer A i B nisu istog tipa.

□

Napomena: *Za zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom vrijede svojstva koja vrijede i za realne brojeve, dakle asocijativnost, komutativnost, te distributivnost množenja skalarom prema zbrajanju.*
Razliku matrica $A - B$ treba shvatiti kao skraćeni zapis za $A + (-1) \cdot B$, što znači da se oduzimanje provodi na analogni način kao i zbrajanje i moguće je samo među matricama istog tipa.

Definicija: ***Umnožak matrica*** *A i B definira se samo ako matrica A ima toliko stupaca koliko matrica B ima redaka. Broj redaka matrice umnoška $A \cdot B$ jednak je onom matrice A, a broj stupaca onom matrice B.*
Preciznije: neka je matrica A tipa $m \times n$ i B tipa $n \times p$. Tada matrica $C = A \cdot B$ ima tip $m \times p$, a elementi su joj dani s

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{in}b_{nj}$$

to jest, na ij-tom mjestu je umnožak i-tog retka matrice A i j-tog stupca matrice B.

Zadatak 4.5: *Nađite AB i BA ako su A i B slijedeće matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 19 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Napomena: *Iz definicije množenja matrica i Zadatka 4.5 se vidi da množenje matrica općenito* ***nije komutativno****. Dapače, čest je slučaj da za zadane matrice A i B postoji umnožak AB, ali nije definiran umnožak BA, ili obratno (a čak i da umnošci u oba poretka množenja i postoje, rezultati tih množenja ne moraju biti matrice istog tipa).*

Zadatak 4.6: *Za matrice A i B izračunajte AB i BA (ako postoje):*

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & -6 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 10 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

BA ne postoji jer je matrica B tipa 3×3, a matrica A tipa 2×3, što znači da broj redaka druge matrice u umnošku ne odgovara broju stupaca prve matrice u umnošku (a to je osnovni uvjet koji matrice moraju zadovoljavati da bi njihov umnožak bio definiran).

□

Napomena: *Ako su A, nul-matrica O i jedinična matrica I istog reda, vrijedi:*

$$\begin{aligned} A + O = O + A = A \\ A \cdot I = I \cdot A = A. \end{aligned}$$

Kažemo da je nul-matrica O neutralni element za zbrajanje, a jedinična matrica I za množenje matrica.

Napomena: *Formalno možemo uvesti i **potenciranje matrice** prirodnim brojevima: produkt $A \cdot A$ skraćeno pišemo kao A^2, $A \cdot A \cdot A = A^3$ itd.*

Zadatak 4.7: *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. *Izračunajte* A^3.

4.3 Determinanta matrice

Definicija: *Svakoj kvadratnoj matrici možemo pridružiti realan broj kojeg zovemo **determinanta matrice**. Za matricu A determinantu označavamo s $|A|$ ili s $\det A$. Determinanta zadovoljava sljedeća osnovna svojstva:*

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(BA) \\ \det I &= 1. \end{aligned}$$

Definicija: *Za zadanu kvadratnu matricu A determinanta $|A|$ se **računa razvojem po nekom izabranom retku ili stupcu**. Ovdje ćemo pokazati razvoj po prvom retku:*

1) *Za kvadratnu matricu **prvog** reda (degenerirani slučaj, jer se matrica sastoji od samo jednog elementa) definiramo:* $\det[a] := |a|$.

2) *Za kvadratnu matricu **drugog** reda:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

3) *Za kvadratnu matricu **trećeg** reda:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$\vdots$

n) Za kvadratnu matricu ***n-tog*** *reda* $A = (a_{ij})$ *definiramo*

$$\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n},$$

gdje je A_{1k} *(*$k \in \{1, \ldots, n\}$*) kvadratna matrica (n-1)-og reda koja se od matrice* A *dobije ispuštanjem prvog retka i k-tog stupca.*

Napomena: *Determinatu ne moramo nužno računati razvojem po prvom retku. Može se pokazati da determinanta ne ovisi o tome po kojem smo retku ili stupcu radili razvoj, tako da se u praksi za razvoj koristi onaj redak ili stupac matrice koji sadrži najviše nula.*

Zadatak 4.8: *Razvojem po drugom retku izračunajte*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Račun determinante počinjem dodjelom predznaka elementima matrice koji se nalaze u drugom retku (jer po njemu radimo razvoj), tj. multiplikativnih faktora 1 ili -1, ovisno o tome na kojem se mjestu u matrici element nalazi. Na primjer, broj 4 se nalazi na presjeku drugog retka i drugog stupca, pa je njemu pridružen faktor $(-1)^{2+2}$, dakle broj 1 (općenito, elementu a_{ij} pridružen je broj $(-1)^{i+j}$). Razvoj po drugom retku sada izgleda ovako:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \\ = \ & (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ = \ & 1 \cdot (9 + 2) + 4 \cdot (6 - 1) + 5(-4 - 3) = -4. \end{aligned}$$

□

Zadatak 4.9: *Izračunajte determinatu matrice iz prethodnog zadatka razvojem po trećem stupcu, a potom po prvom reku te se uvjerite da dobivate uvijek isto rješenje.*

Zadatak 4.10: *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Razvojem po trećem retku imamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

□

Zadatak 4.11: *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadatak 4.12:

Izračunajte determinante sljedećih matrica:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & \log_y x \\ \log_x y & 1 \end{bmatrix}$.

4.4 Inverzna matrica

Definicija: *Za kvadratnu matricu A kažemo da je* ***regularna*** *ili* ***invertibilna*** *ako postoji jedinstvena kvadratna matrica A^{-1} za koju vrijedu*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Matricu A^{-1} zovemo ***inverzna matrica*** *(ili, skraćeno,* ***inverz****) matrice A.*
Kvadratne matrice koje nemaju inverznu matricu zovemo ***singularne*** *ili* ***neinvertibilne*** *matrice.*

Teorem: *Regularne su samo one kvadratne matrice čija determinanta nije nula.*

Napomena: *Gornji teorem predstavlja kriterij za provjeru ima li zadana kvadratna matrica inverz: samo one kvadratne matrice čija je determinanta različita od nule imaju inverznu matricu.*

Primjer 4.13: *Matrica iz Zadatka 4.8 jest regularna (jer joj je determinanta različita od nule), što ukazuje na to da za nju postoji inverzna matrica, dok ona iz Zadatka 4.10 nije, tj. nema inverznu matricu.*

Definicija: ***Transponirana matrica*** *matrice A tipa $m \times n$ je matrica A^τ tipa $n \times m$ koju dobivamo tako da u matrici A zamijenimo retke stupcima, a stupce retcima.*

Primjer 4.14: *Transponirana matrica matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *je* $A^\tau = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Definicija: ***Adjungirana matrica*** *A^* kvadratne matrice A je matrica koja na (i,j)-om mjestu ima broj $(-1)^{j+i}\cdot\det A^\tau_{ij}$, gdje je A^τ_{ij} matrica dobivena iz transponirane matrice A^τ izbacivanjem i-og retka i j-og stupca.*

Zadatak 4.15: *Za matricu $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}$ izračunajte adjungiranu matricu.*

Rješenje. Najprije računamo transponiranu matricu A^τ :

$$A^\tau=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}.$$

Zatim računamo $A^*=(a^*_{ij})$ po elementima:

$$\begin{aligned} a^*_{11} &= (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1\\ 5 & 3\end{vmatrix} = (-1)\cdot 3-(-1)\cdot 5 = 2\\ a^*_{12} &= (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix} = (-1)(1\cdot 3-2\cdot 5) = 7\\ &\vdots\\ a^*_{33} &= (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)-1\cdot 3 = -4, \end{aligned}$$

što daje $A^*=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1\\ -11 & -1 & 7\\ 17 & -3 & -4\end{bmatrix}$. □

Zadatak 4.16: *Nađite adjungiranu matricu općenite kvadratne matrice drugog reda.*

Rješenje. Uz oznaku $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ nije teško vidjeti da je $A=\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$. □

Teorem: *Za zadanu regularnu matricu A vrijedi sljedeća* ***formula za inverznu matricu****:*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*.$$

Napomena: *Gornja formula determinantu u nazivniku, što znači da ta formula ima smisla za regularne, ali ne i singularne matrice (jer je za njih determinanta jednaka nuli).*

Primjer 4.17: *Koristeći prethodni primjer i činjenicu da je za $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ determinanta jednaka $|A|=ad-bc$, imamo lako pamtivu formulu za inverz matrice drugog reda:*

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}.$$

Zadatak 4.18: *Izračunajte inverz matrice iz Zadatka 4.15.*

Rješenje. U Zadatku 4.15 smo već izračunali adjungiranu matricu A^* pa preostaje izračunati samo determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25.$$

Korištenjem formule za inverznu matricu imamo:

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

□

Napomena: *Provjerite da je matrica dobivena u Zadatku 4.18 doista inverzna matrici iz Zadatka 4.15, tj. da vrijedi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (dovoljno je provjeriti samo jednu jednakost, npr. $A \cdot A^{-1} = I$).*

Zadatak 4.19:

Odredite inverz matrice iz Zadatka 4.8.

4.5 Primjena matrica na transformacije

Teorem: ***Kompozicija linearnih transformacija*** *je opet linearna transformacija, a matrica te kompozicijske transformacije dobiva se* ***množenjem matrica*** *polaznih transformacija. Pritom je u spomenutom umnošku matrica koja dolazi zdesna matrica prve transformacije u kompoziciji, dok je matrica koja dolazi slijeva matrica druge transformacije u kompoziciji. Ukratko:*

Kompoziciji transformacija odgovara množenje matrica.

Zadatak 4.20: *Koristeći matrični račun provjerite da je kompozicija ravninskih rotacija oko ishodišta za kuteve α i β upravo ravninska rotacija oko ishodišta za kut $\alpha + \beta$.*

Rješenje. Ravninske rotacije oko ishodišta za kuteve α i β imaju matrične prikaze $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$. Množenjem tih matrica dobivamo upravo matricu ravninske rotacije oko ishodišta za kut $\alpha+\beta$:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}=\\ =&\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}=\\ =&\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

□

Zadatak 4.21: *Primijenite uzastopce na točku* $(2,2,1)$ *sljedeće transformacije prostora:*

a) transformaciju iz Zadatka 3.6, potom transformaciju iz Zadatka 3.8 a),

b) transformaciju iz Zadatka 3.8 a), potom transformaciju iz Zadatka 3.6.

Dobivate li iste točke? Objasnite zašto!

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot(\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix})=\\ =&\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\2\\-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\-2\\-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

b) Analogno slučaju a), samo što je poredak matrica transfromacija suprotan - prva i druga matrica u gornjem izrazu mijenjaju mjesta. Međutim, rezultat je isti (provjerite!).

Dakle, u oba slučaja dobivamo isti rezultat, što možemo objasniti činjenicom da je dobivena točka slika zadane točke obzirom na kompoziciju spomenutih transformacija. Geometrijski gledano, svejedno je jesmo li točku najprije rotirali za 240° oko osi y pa je potom zrcalili obzirom na $xz-$ravninu, ili smo učinili obratno. □

Napomena: *Prethodni smo zadatak mogli riješiti i tako da najprije pomnožimo zadane transformacije (u bilo kojem poretku):*

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-1&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

te potom dobivenom matricom pomnožimo stupčanu matricu koja odgovara točki $(2,2,1)$.

Zadatak 4.22: *Pokažite da uzastopnom primjenom rotacije ravnine oko ishodišta za kut α, centralne simetrije ravnine te rotacije ravnine oko ishodišta za kut $180° - \alpha$ dobivamo identitetu, tj. transformaciju koja preslikava svaku točku u nju samu. Interpretirajte zadatak geometrijski i analitički (tako da uočite koju matricu dobijete množenjem pripadnih matrica ovih transformacija)!*

Vidjeli smo da kompoziciji linearnih transformacija odgovara množenje matrica. No, vrijedi i sljedeće:

Teorem: *Inverzna transformacija linearne transformacije je opet linearna transformacija, a matrica te inverzne transformacije je* ***inverzna matrica*** *matrice polazne transformacije. Ukratko:*

Inverznoj transformaciji odgovara inverzna matrica.

Zadatak 4.23: *Koristeći matrični račun provjerite da je inverzna transformacija ravninske rotacije oko ishodišta za kut α opet ravninska rotacija oko ishodišta, i to za kut $-\alpha$.*

Rješenje. Računamo inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ravninske rotacije oko ishodišta za kut α. Vrijedi $detA = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pa je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix},$$

što je upravo matrica ravninske rotacije oko ishodišta za kut $-\alpha$ (koristili smo sljedeća svojstva trigonometrijskih funkcija: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$). $\square$

Zadatak 4.24: *Nađite inverznu transformaciju prostorne simetrije obzirom na $xz-$ravninu.*

Rješenje. Prema formuli za inverzu matricu računamo inverznu matricu spomenute simetrije:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tj. dobivamo polaznu matricu. Zaključujemo da je inverzna transformacija zadane simetrije opet ista ta simetrija. Objasnite zašto (koristite geometrijski argument)! $\square$

Poglavlje 5

Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora

5.1 Skalarni produkt vektora

Definicija: ***Skalarni produkt vektora*** *$\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava se s $\vec{a}\cdot\vec{b}$ i definira na sljedeći način: ako su oba vektora različita od $\vec{0}$, onda je*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} := |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Pod ***kutem između vektora*** *$\vec{a}$ i $\vec{b}$ smatramo kut kojeg zatvaraju zrake koje određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kad imaju zajednički početak. Ako je bar jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak nul-vektoru, onda definiramo $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.*

Napomena: *Iz definicije se vidi da je skalarni produkt vektora broj, a ne vektor. Dalje, ako je $\vec{b}=\vec{a}$, formula za skalarni produkt postaje $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|^2$, što znači da je $\vec{a}^2\geq 0$ za svaki vektor $\vec{a}$, a $\vec{a}^2=\vec{0}$ samo ako je $\vec{a}=\vec{0}$.*
Također, vidimo da je skalarni produkt vektora komutativan, što znači da je svejedno koji je od dva zadana vektora prvi, a koji drugi u skalarnom produktu.

Napomena: *Za dva vektora kažemo da su* ***ortogonalni*** *ako je kut između njih pravi. Skalarni produkt vektora daje nam koristan kriterij za utvrđivanje ortogonalnosti vektora. Naime, za ortogonalne vektore zbog $\cos\varphi=\cos 90^\circ=0$ vrijedi $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. S druge strane, ako je $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, onda je ili neki od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, jednak nul-vektoru, ili su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno ortogonalni. Specijalan slučaj međusobno ortogonalnih vektora su koordinatni vektori iz $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ iz Poglavlja 2.*
Osim toga, lako se vidi da će skalarni produkt biti pozitivan ako je kut među vektorima šiljast, a negativan ako je taj kut tup.

Zadatak 5.1: *Koji kut zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ i $\vec{b}=5\vec{m}-4\vec{n}$ međusobno ortogonalni?*

Rješenje. Činjenicu da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni pišemo preko skalarnog produkta:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= 0 \\ (\vec{m}+2\vec{n})\cdot(5\vec{m}-4\vec{n}) &= 0 \\ 5\vec{m}^2+10\vec{n}\vec{m}-4\vec{m}\vec{n}-8\vec{n}^2 &= 0 \\ 5|\vec{m}|^2+6\vec{m}\vec{n}-8|\vec{n}|^2 &= 0 \\ 5+6\cos\varphi-8 &= 0, \end{aligned}$$

odakle slijedi $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, odnosno $\varphi = 120°$. □

Zadatak 5.2: *Zadano je* $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 30$. *Izračunajte* $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Rješenje. Računamo:

$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\vec{b} \\ |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= \cdots = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\vec{b}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti imamo $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$, odakle uvrštavanjem vrijednosti zadanih u zadatku odmah slijedi rješenje: $|\vec{a}+\vec{b}| = 20$. Zadatak ima i geometrijsku formulaciju: izračunaj duljinu kraće dijagonale paralelograma kojem su duljine stranica 11 i 23, a duljina duže dijagonale iznosi 30. □

Teorem: *Za dva analitički zadana vektora* $\vec{a} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ *dajemo sljedeću **formulu za skalarni produkt**:*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Pri izvođenju ove formule koristili smo činjenicu da su $\vec{i}$, $\vec{j}$ *i* $\vec{k}$ *jedinični i međusobno ortogonalni pa je* $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$ *te* $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.

Primjer 5.3: *Izračunajte skalarni produkt vektora* $\vec{a} = \vec{i}-\vec{j}$ *i* $\vec{b} = \vec{j}+\vec{k}$. *Što možete reći o kutu među tim vektorima?*

Rješenje. Prema formuli imamo

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 0 - 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = -1.$$

Zaključujemo da je kut među ovim vektorima tup. □

Znamo da je ortogonalnost ekvivalentna svojstvu da je skalarni produt jednak nuli, pa imamo sljedeći **kriterij ortogonalnosti** dva vektora u analitičkom zapisu:

Teorem: *Ne-nul vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *su ortogonalni ako i samo ako vrijedi*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 0.$$

Napomena: *Znamo da je* $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$*, gdje je* φ *kut između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*. Postavlja se pitanje: možemo li izračunati ovaj kut poznavajući koordinate vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*? Odgovor daje sljedeća formula (koja vrijedi samo ako* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *nisu nul-vektori):*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}.$$

Zadatak 5.4: *Izračunajte kut među vektorima iz Primjera 5.3.*

Rješenje. U Primjeru 5.3 izračunali smo skalarni produkt ovih vektora, što koristimo u formuli za kut:

$$\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}\cdot\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = -\frac{1}{2},$$

iz čega zaključujemo da se radi o kutu $\varphi = 120^\circ$. $\square$

Zadatak 5.5: *Zadana su tri vrha paralelograma* $ABCD$*:* $A(-2,-1,1)$*,* $B(4,-2,2)$ *i* $C(6,1,3)$*. Odredite koordinate vrha* D *te izračunajte kut između dijagonala.*

Rješenje. U paralelogramu vrijedi jednakost vektora $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Uz $D = (x,y,z)$ imamo

$$\begin{aligned}(6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} &= (4+2)\vec{i} + (-2+1)\vec{j} + (2-1)\vec{k}\\ (6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} &= 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},\end{aligned}$$

odakle (iz jednakosti vektora s lijeve i s desne strane jednakosti) dobivamo $D = (0,2,2)$. Dalje, računamo vektore dijagonala $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= 8\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},\\ \overrightarrow{DB} &= 4\vec{i} - 4\vec{j},\end{aligned}$$

pa, uz oznaku α za kut među dijagonalama, imamo:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|} = \frac{32-8}{\sqrt{8^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+4^2}} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, kut među dijagonalama iznosi $\alpha = 60^\circ$. $\square$

Napomena: *Formula za skalarni produkt, kriterij ortogonalnosti i formula za kut među vektorima u analitičkom zapisu dana je za vektore u prostoru, no analogne formule mogu se napisati i za vektore u ravnini ili pak vektorskom prostoru proizvoljne dimenzije.*

5.2 Vektorski produkt vektora

Definicija: ***Vektorski produkt*** *dva prostorna vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *je vektor kojeg označavamo s* $\vec{a}\times\vec{b}$*, sa sljedećim svojstvima:*

1. *duljina: modul vektora* $\vec{a}\times\vec{b}$ *jednak je površini paralelograma određenog s* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*, tj.* $|\vec{a}\times\vec{b}| := |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$*, gdje je* φ *kut između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$

2. *smjer:* $\vec{a}\times\vec{b}$ *je ortogonalan na ravninu određenu vektorima* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*, tj. ortogonalan je i* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$

3. *orijentacija: uređena trojka* $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{c})$ *čini* ***desni sustav****: zakretanje vektora* $\vec{a}$ *u vektor* $\vec{b}$ *za kut* φ *između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *promatrano iz krajnje točke vektora* $\vec{a}\times\vec{b}$ *ima smjer suprotan smjeru kretanja kazaljke na satu. Napomenimo da je, za razliku od skalarnog produkta vektora, vektorski produkt moguće promatrati isključivo za prostorne vektore.*

Ako su vektori $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *kolinearni, definiramo da je* $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$*. Posebno, za koordinatne vektore* $\vec{i}$*,* $\vec{j}$ *i* $\vec{k}$ *vrijedi*

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.$$

Napomena: *Vektorski produkt vektora nam daje koristan kriterij za utvrđivanje kolinearnosti vektora. Naime, ne-nul vektori će biti kolinearni ako i samo ako je njihov vektorski produkt jednak nul-vektoru.*

Primjer 5.6: *Odredimo* $\vec{j}\times\vec{i}$*. Prema definiciji vektorskog produkta znamo da rezultat mora biti jedinični vektor, jer mu je duljina jednaka površini lika kojeg određuju vektori* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$ *(a radi se o pravokutniku površine* 1*). S druge strane, mora biti ortogonalan na ravninu određenu vektorima* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$ *pa imamo samo dvije mogućnosti za rješenje:* $\vec{k}$ *ili* $-\vec{k}$*. No, zahtjev da uređena trojka* $(\vec{j},\vec{i},\vec{i}\times\vec{j})$ *čini desni sustav otklanja prvu mogućnost, dakle imamo* $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$*.*

Zadatak 5.7:

Izračunajte preostale produkte koordinatnih vektora $\vec{i}$*,* $\vec{j}$ *i* $\vec{k}$*.*

Teorem: *Za dva analitički zadana vektora* $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ *i* $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ *dajemo sljedeću* ***formulu za vektorski produkt****:*

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = \\
&= a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+ \\
&\quad + a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j} = \\
&= a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i} = \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k},
\end{aligned}$$

što možemo simbolički skraćeno pisati ovako:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Zadatak 5.8: *Izračunajte vektorski produkt vektora $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ te izračunajte površinu paralelograma kojeg određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*

Rješenje. Prema formuli iz Teorema imamo

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}. \end{aligned}$$

Prema definiciji vektorskog produkta, tražena površina P jednaka je modulu vektorskog produkta $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{38}.$$

□

Zadatak 5.9: *Izračunajte površinu paralelograma iz Zadatka 5.5.*

Rješenje. Najprije računamo vektore dijagonala $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \overrightarrow{AD} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \end{aligned}$$

a potom traženu površinu kao modul vektorskog produkta ovih vektora:

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 20\vec{k} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 20^2} = 12\sqrt{3}.$$

□

Znamo da je kolinearnost ekvivalentna svojstvu da je vektorski produt jednak nul-vektoru, pa imamo sljedeći **kriterij kolinearnosti** dva vektora u analitičkom zapisu:

Teorem: *Ne-nul vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako vrijedi*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\vec{0}.$$

Primjer 5.10: *Vektori $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ su kolinearni jer vrijedi*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -2\end{vmatrix}=\vec{0}.$$

Podsjetimo se da smo u Poglavlju 2 dali drugačiji kriterij kolinearnosti (s kojim je bilo lakše računati!).

5.3 Mješoviti produkt vektora

Definicija: ***Mješoviti produkt*** *tri prostorna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je realan broj kojeg računamo po formuli $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, gdje s $\times$ označavamo vektorski, a s $\cdot$ skalarni produkt vektora. Kao i kod vektorskog produkta, mješoviti produkt tri vektora moguće je računati isključivo za prostorne vektore.*

Napomena: *Međusobni odnos tri prostorna vektora je takav da oni općenito ne određuju jednu ravninu. Naime, bilo koja dva od ta tri vektora općenito određuju neku ravninu, ali ne mora nužno i treći vektor biti u toj ravnini. Ukoliko je riječ o specijalnom slučaju da su sva tri vektora u istoj ravnini, kažemo da su vektori* ***komplanarni****. Može se pokazati da mješoviti produkt vektora daje koristan kriterij za utvrđivanje komplanarnosti tri vektora. Naime, tri ne-nul vektora će biti komplanarni ako i samo ako je njihov mješoviti produkt jednak nuli. U tom slučaju će se svaki od ta tri vektora moći napisati kao linearna kombinacija preostala dva vektora.*

Teorem: *Za tri analitički zadana vektora $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ i $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+_3\vec{k}$ dajemo sljedeću* ***formulu za mješoviti produkt****:*

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\times(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})=\\ &= (\vec{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})\cdot(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})=\\ &= c_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix},\end{aligned}$$

što možemo simbolički skraćeno pisati ovako:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Zadatak 5.11: *Izračunajte mješoviti produkt vektora* $\vec{a} = -\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j}+2\vec{k}$ *i* $\vec{c} = 2\vec{i}-5\vec{j}$.

Rješenje. Prema formuli za mješoviti produkt imamo

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-2) - 2\cdot 1 = -8.$$

□

Znamo da je komplanarnost ekvivalentna svojstvu da je mješoviti produt jednak nuli, pa imamo sljedeći **kriterij komplanarnosti** tri vektora u analitičkom zapisu:

Teorem: *Ne-nul vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *su komplanarni ako i samo ako vrijedi*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Primjer 5.12: *Vektori iz Zadatka 5.11 očito nisu komplanarni, jer je njihov mješoviti produkt različit od nule.*

Zadatak 5.13: *Pokažite da su sljedeći vektori komplanarni:* $\vec{a} = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ *i* $\vec{c} = \vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k}$. *Izrazite vektor* $\vec{c}$ *kao linearnu kombinaciju vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

Rješenje. Vektori će biti komplanarni ako je njihov mješoviti produkt jednak nuli:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 2(-7+8) + (-7+2) + (4-1) = 0,$$

što ovdje jest slučaj. Dakle, zadani vektori su komplanarni. Da bismo izrazili vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, trebamo pronaći skalare α i β takve da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$:

$$\vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k} = \alpha(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) + \beta(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}),$$

odakle slijedi sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha+\beta &= -1 \\ -\alpha+\beta &= 4 \\ \alpha-2\beta &= -7. \end{aligned}$$

Rješavanjem prve dvije jednadžbe ovog sustava dobivamo $\alpha = -1$, $\beta = 3$, što zadovoljava i treću jednadžbu (to je još jedna potvrda da su vektori komplanarni). Prikaz vektora $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ glasi: $\vec{c} = -\vec{a} + 3\vec{b}$. □

Zadatak 5.14: *Odredite $x \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a} = (2x-6)\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = (3x-1)\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = (3-8x)\vec{i} + (x-2)\vec{j} - 3x\vec{k}$ budu komplanarni te u tom slučaju izrazite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*

Rješenje. Vektori će biti komplanarni ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & 4 & -3 \\ 3x-1 & 2 & 2 \\ 3-8x & x-2 & -3x \end{vmatrix} = 0,$$

odakle dobivamo dva rješenja: $x_1 = 4$ i $x_2 = -\frac{3}{11}$. Pogledajmo kako izgledaju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ za $x = 4$: $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = -29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k}$. Znamo da su ova tri vektora komplanarna, tj. da jedan od njih možemo izraziti kao linearnu kombinaciju prostalih dvaju. Odaberimo vektor $\vec{c}$: tražimo α i β tako da vrijedi $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, tj. $-29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) + \beta(11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$, odakle izjednačavanjem koeficijenata uz koordinatne vektore dobivamo

$$\begin{aligned} 2\alpha + 11\beta &= -29 \\ 4\alpha + 2\beta &= 2 \\ -3\alpha + 2\beta &= -12. \end{aligned}$$

Ovaj sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice ima jedinstveno rješenje i ono iznosi $\alpha = 2$, $\beta = -3$, pa je prikaz vektora $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dan s $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. □

Napomena: *Mješoviti produkt vektora ima zanimljivu geometrijsku interpretaciju: u slučaju da nisu komplementarni, možemo zamisliti da $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{b}$ određuju prostorno tijelo (zovemo ga paralelepiped). Može se pokazati da volumen V tog tijela (do na predznak) odgovara volumenu tog paralelepipeda. Točnije, vrijedi*

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Zadatak 5.15: *Odredite volumen, površinu baze i visinu tijela određenog vektorima iz Zadatka 5.11.*

Rješenje. U Zadatku 5.11 smo već izračunali mješoviti produkt zadanih vektora. Obzirom da je rezultat negativan, uzimamo da je traženi volumen V jednak $V = |-8| = 8$. Za bazu paralelepipeda možemo uzeti paralelogram određen vektorima $\vec{a}$

i $\vec{b}$. Znamo da je površina B tog paralelograma jednaka modulu njihovog vektorskog produkta

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

pa je

$$B = \vec{a} \times \vec{b} = |7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{62}.$$

Konačno, visinu h možemo dobiti iz klasične formule $V = B \cdot h$ za volumen prizme:

$$h = \frac{V}{B} = \frac{8}{\sqrt{62}} = \frac{8\sqrt{62}}{62}.$$

□

Zadatak 5.16: *Pokažite da su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} - 3\vec{k}$ linearno nezavisni i prikažite vektor $\vec{i}$ kao njihovu linearnu kombinaciju.*

Rješenje. Uputa: pokažite da zadani vektori nisu komplanarni (mješoviti produkt im nije nula), što dokazuje njihovu linearnu nezavisnost. Vektor $\vec{i}$ ćete prikazati kao njihovu linearnu kombinaciju ako nađete skalare α, β i γ takve da vrijedi $\vec{i} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ (pogledajte npr. Zadatak 5.13). □

Poglavlje 6

Linearni sustavi

6.1 Matrični prikaz linearnih sustava

Definicija: ***Sustav linearnih jednadžbi*** *od m linearnih jednažbi s n realnih nepoznanica $x_1, \dots, x_n$ zapisujemo općenito oavko:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Realne brojeve a_{ij}, gdje je $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, zovemo ***koeficijenti*** *sustava, dok realne brojeve $b_1, b_2, \dots, b_m$ zovemo* ***slobodni koeficijenti*** *sustava. Matricu*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zovemo ***matrica sustava****, a matricu*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

proširena matrica sustava*. Ako definiramo* ***matricu slobodnih članova***

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

*te **matricu nepoznanica***

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

linearni sustav može se zapisati jednostavno kao

$$AX = B.$$

6.2 Regularni sustavi

Napomena: *Linearni sustav $AX = B$ ima **jedinstveno rješenje** ukoliko je matrica sustava A regularna. Sustave koji imaju jedinstveno rješenje zovemo **regularni sustavi**. Osnovni uvjet da matrica sustava, a time i sustav, bude regularna, jest taj da sustav ima jednak broj jednadžbi i nepoznanica (što osigurava da matrica A bude kvadratna). Uz to, matrica sustava mora biti regularna, što najjednostavnije pokazujemo tako da uočimo je li njena determinanta različita od nule (vidi Poglavlje 4).*

Dajemo jednostavnu metodu za nalaženje rješenja regularnog sustav:

Teorem: *Rješavanje regularnog linearnog sustava $AX = B$ **metodom inverzne matrice** izvodi se pomoću sljedeće formule:*

$$X = A^{-1}B,$$

gdje je A^{-1} inverzna matrica matrice sustava A.

Zadatak 6.1: *Nalaženjem inverzne matrice riješite sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ -4x + 4y + z &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje. Matrični zapis našeg sustava je:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nalaženjem determinante i adjungirane matrice matrice sustava (vidi Poglavlje 4!) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ dolazimo do inverzne matrice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Sada imamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

tj. rješenje sustava glasi $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 1$. □

Zadatak 6.2: *Nalaženjem inverzne matrice riješite sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 3 \\ x + z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

Pored metode inverzne matrice, poznata je i sljedeća metoda za rješavanje regularnih sustava:

Teorem: *Svaki regularni linearni sustav $AX = B$ može se riješiti* ***Cramerovim pravilom****: označimo stupce matrice A redom slovima $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, ..., $\boldsymbol{a_n}$, a stupac matrice B s $\boldsymbol{b}$. Rješenje sustava je dano formulama*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

gdje je $D = \det[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}] = \det A$, $D_1 = \det[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}]$, ..., $D_n = \det[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{b}]$, tj. determinante $D_1, D_2, \dots, D_n$ su determinante matrica koje su dobivene tako da se u matricu A ubacuje stupac $\boldsymbol{b}$ umjesto stupca $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$, redom.

Zadatak 6.3: *Pomoću Cramerovog pravila riješite slijedeći sustav:*

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= -1 \\ 2x + 5y - z + 2u &= -2 \\ 3x - y - 2z + u &= 5 \\ x - y + 3z - 5u &= 6. \end{aligned}$$

Rješenje. Sustav najprije zapisujemo matrično:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Za matricu sustava A računamo determinantu $D = \det A = \cdots = -34$. Dalje, računamo determinantu D_1 matrice koja se dobije tako da se prvi stupac matrice A zamijeni stupcem matrice slobodnih koeficijenata:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \cdots = -68.$$

Analogno postupamo za ostala tri stupca matrice A. Determinante matrica koje tako dobivamo redom iznose $D_2 = 34, D_3 = -34, D_4 = 0$, što prema Cramerovom pravilu daje konačno rješenje sustava:

$$x_1 = \frac{-68}{-34} = 2, \quad x_2 = \frac{34}{-34} = -1, \quad x_3 = \frac{-34}{-34} = 1, \quad x_4 = \frac{0}{-34} = 0.$$

□

Zadatak 6.4: *Korištenjem obje navedene metode za regularne sustave riješite sljedeće sustave:*

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= 0 \\ 2x + 5y - z + 2u &= 1 \\ 3x - y - 2z + u &= 2 \\ x - y + 3z - 5u &= 3. \end{aligned}$$

6.3 Gauss-Jordanova metoda

Definicija: ***Gauss-Jordanova metoda*** *se koristi za rješavanje općenitih linearnih sustava, dakle i onih sustava koji nemaju jednak broj jednadžbi i nepoznanica, a ne samo regularnih sustava. Ta se metoda koristi sljedećim tzv.* ***elementarnim matričnim transformacijama****:*

a) zamjena dva retka (ili stupaca) proširene matrice sustava

b) množenje jednog retka proširene matrice sustava brojem različitim od nule

c) dodavanje jednog retka proširene matrice sustava drugom retku.

Elementarna matrična transformacija zamjene stupaca nije uobičajena, iako je dopuštena, jer takva transformacija mijenja informaciju o poretku nepoznanica. Naime, zamišljamo da svakoj nepoznanici "pripada" odgovarajući stupac; nakon zamjene stupaca moramo povesti računa o tome kojoj nepoznanici pripada koji stupac.

Napomena: *Navedene matrične transformacije "oponašaju" uobičajene postupke koje koristimo prilikom rješavanja linearnog sustava zapisanog na uobičajeni način, u obliku jednadžbi, a to su: zamjena poretka dviju jednadžbi, množenje odgovarajuće jednadžbe brojem različitim od nule ili dodavanje neke jednadžbe nekoj drugoj jednadžbi sustava.*

Provođenjem navedenih elementarnih matrilnih transformacija nad proširenom matricom sustava pokušava se doći do najjednostavnijeg mogućeg ekvivalentnog oblika proširene matrice, tj. do oblika u kojem će što veći broj elemenata (proširene) matrice biti jednak nuli. Točnije, svodimo (proširenu) matricu sustava do oblika najbližeg dijagonalnom obliku, jer je iz njega najjednostavnije "očitati" rješenje sustava. Pored ovog načina, moguće je svoditi (proširenu) matricu sustava i na gornjetrokutasti ili donjetrokutasti oblik.

Zadatak 6.5: *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned} 5x + 4z + 2t &= 3 \\ x - y + 2z + t &= 1 \\ 4x + y + 2z &= 1 \\ x + y + z + t &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Koristimo elementarne matrične transformacije za svođenje proširenu matice sustava do dijagonalnog oblika:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim^2$$

$$\sim^2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim^3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim^4$$

$$\sim^4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim^5 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^6$$

$$\sim^6 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^7 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^8$$

$$\sim^8 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

uz korištenje sljedećih transformacija:

1) zamjena prvog i četvrtog retka (kako bismo u gornjem lijevom kutu imali jedinicu, što je standardni početak rješavanja sustava putem elementarnih transformacija - želimo na kraju imati dijagonalnu formu s jedinicama na dijagonali!)

2) prvi redak pomnožen redom s -1, -4 i -5 i dodan redom drugom, trećem i četvrtom retku (želja nam je dobiti nule na nedijagonalnim elementima prvog stupca)

3) zamjena drugog i trećeg stupca (kako bismo kao drugi dijagonalni element - na presjeku drugog retka i drugog stupca - također imali jedinicu) - bitno je ovdje primjetiti da su time varijable y i z zamijenile mjesta. Naime, varijabli y sada pripada treći, a varijabli z drugi stupac.

4) drugi redak pomnožen redom s -1, 2 i 1 i dodan redom prvom, trećem i četvrtom retku (vidi napomenu uz 2))

5) treći redak pomnožen s -1 i dodan četvrtom retku (kako bismo dobili nulu na jedinom preostalom nedijalgonalnom elementu četvrtog retka i jedinicu na dijagonalnom elementu)

6) četvrti redak pomnožen redom s -1 i 4 i dodan redom prvom i trećem retku (vidi napomenu uz 2))

7) treći redak podijeljen s -7 (kako bi na dijagonalnom elementu trećeg retka dobili jedinicu)

8) treći redak pomnožen redom s -3 i 2 i dodan redom prvom i drugom retku (vidi napomenu uz 2)).

Ovim postupkom dolazimo do proširene matrice sustava koji je ekvivalentan početnom i ima isto rješenje. Međutim, rješenje ovog sustava možemo jednostavno pročitati iz proširene matrice koju smo dobili (uz napomenu da su y i z zamijenili mjesta): $x = 1$, $z = -1$, $y = -1$, $t = 1$, pa uređena četvorka $(1, -1, -1, 1)$ čini jedinstveno rješenje početnog sustava. Dakle, ovaj je sustav regularan, što možemo vidjeti i po tome što smo proširenu matricu sustava uspjeli svesti na dijagonalni oblik $\square$

Napomena: *Iako se Gauss-Jordanova metoda čini teškom, ona je neusporedivo brža od metoda koje smo upoznali u prethodnom odlomku, jer koristi mnogo manje računskih operacija od tih metoda. Međutim, to je teško primijetiti na sustavima s malim brojem jednadžbi i nepoznanica, ali se kod velikih sustava to može dobro uočiti.*

Zadatak 6.6: *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1\\
8x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 &= 2\\
-4x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 4x_5 &= 0\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1.
\end{aligned}$$

Zadatak 6.7: *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
4x - y + z + 2u &= 14\\
2x + y - 3u &= 2\\
x - y + 2z + u &= 3\\
2x + y + z - 4u &= 0.
\end{aligned}$$

Zadatak 6.8: *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
-3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= -11\\
-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3\\
4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2\\
4x_1 - 2x_2 + 9x_3 - x_4 &= -33.
\end{aligned}$$

U Zadatku 6.5 rješavali smo Gauss-Jordanovom metodom regularan sustav. No, tom se metodom mogu rješavati i sustavi koji nisu regularni, tj. nemaju jedinstveno rješenje. Jedine dvije mogućnosti za takve sustave su da:

a) nemaju rješenja (**nemogući sustavi**)

b) imaju neograničeno mnogo rješenja (**neodređeni sustavi**).

Pogledajmo što se događa kada Gauss-Jordanovom metodom rješavamo takve sustave:

Primjer 6.9: *Ako se prilikom rješavanja sustava Gauss-Jordanovom metodom u proširenoj matrici sustava pojave dva retka koji imaju sve elemente redom iste, osim što se razlikuju u slobodnom članu, dolazimo do nemogućeg sustava, tj. sustava koji nema rješenja. Na primjer, u matrici*

$$\begin{pmatrix} 15 & 2 & 0 & 7 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & | & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & | & 3 \end{pmatrix}$$

se drugi i četvrti redak razlikuju samo u slobodnom elementu. Ako oduzmemo drugi redak od četvrtog, dolazimo do ekvivalentne matrice

$$\begin{pmatrix} 15 & 2 & 0 & 7 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & | & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix},$$

čiji četvrti redak daje jednadžbu $0 \cdot x_4 = 4$, koja očito nema rješenja.

Zadatak 6.10: *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -4 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Primjer 6.11: *Ako se prilikom rješavanja sustava Gauss-Jordanovom metodom u proširenoj matrici sustava pojave dva istovjetna retka, možemo jedan od njih odbaciti. Na primjer, kod matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & | & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & | & 5 \\ -2 & -4 & -8 & -2 & | & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

se prvi i treći redak podudaraju (što se vidi ako se treći redak podijeli s -2), pa jedan od njih možemo odbaciti, nastavljajući raditi s matricom

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & | & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & | & 5 \\ 1 & -3 & 0 & -3 & | & 4 \end{array}\right).$$

Ovakvu matricu više ne možemo svesti na dijagonalni oblik, ali možemo na kvazi-dijagonalni, koji se dobije kada se povuče dijagnala od elementa na presjeku prvog retka i prvog stupca do posljednjeg mogućeg elementa. Ovakvi sustavi imaju beskonačno mnogo rješenja, tj. zovemo ih neodređenima.

Zadatak 6.12: *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 - 5x_5 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 10x_4 - 9x_5 &= -3. \end{aligned}$$

6.4 Račun determinante i inverzne matrice

Elementarne matrične transformacije možemo koristiti i za nalaženje determinante i inverza kvadratne matrice.

Definicija: *Za računanje determinante zadane kvadratne matrice pomoću elementarnih matričnih transformacija koristimo sljedeća pravila:*

a) Ako dva stupca ili dva retka matrice zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak.

b) Za matricu B dobivenu množenjem stupca ili retka matrice A nekim realnim brojem k vrijedi: $\det B = k \det A$.

c) Ako nekom retku ili stupcu matrice A dodamo linearnu kombinaciju ostalih redaka ili stupaca, determinanta se ne mijenja.

Pritom je korisno znati i sljedeće:

a) Ako su svi elementi nekog stupca ili nekog retka matrice jednaki nuli, onda je i determinanta te matrice jednaka nuli.

b) Ako matrica ima dva stupca ili dva retka jednaka, onda je determinanta te matrice jednaka nuli.

c) Determinanta matrice koja ima trokutasti oblik jednaka je umnošku dijagonalnih elemenata.

Korištenjem transformacija determinantu najčešće računamo tako da matricu svodimo na tzv. trokutastu formu:

Zadatak 6.13: *Koristeći gornja pravila izračunajte determinantu matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje. Imamo redom:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =^1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} =^2 -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} =^3$$
$$=^3 -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1,$$

gdje smo:

1) prvi redak množili s -2 i dodali drugom pa zatim s -3 i dodali trećem kako bi postigli nule u prvom stupcu,

2) izlučili -3 iz drugog retka kako bi na drugom mjestu dobili 1 s kojim ćemo poništiti -4 u trećem redu

3) množili drugi redak s 4 i dodali trećem.

Determinanta je na kraju imala gornjetrokutasti oblik pa je za njeno računanje bilo dovoljno izmnožiti elemente na dijagonali. □

Zadatak 6.14: *Koristeći gornja pravila pokažite da je determinanta sljedeće matrice jednaka nuli:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & 2 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definicija: *Za računanje inverzne matrice zadane kvadratne matrice pomoću elementarnih matričnih transformacija koristimo sljedeća pravila, odnosno matrične transformacije:*

a) zamjena dvaju redaka (stupaca)

b) množenje jednog retka (stupca) realnim brojem različitim od nule

c) dodavanje jednog retka (stupca) pomnoženog realnim brojem drugom retku (stupcu)

Kad tražimo inverz matrice A, gornjim transformacijama je svodimo na jediničnu matricu, a istovremeno sve što radimo s A radimo i sa jediničnom matricom. Konačan rezultat je inverzna matrica A^{-1}. Simbolički to možemo prikazati ovako:

$$[A|I] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}].$$

Zadatak 6.15: *Za matricu* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *izračunajte* A^{-1}.

Rješenje.

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim^1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 2 & 3 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim^3$$
$$\sim^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -3 \\ 0 & -1 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -3 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{pmatrix} = (I|A^{-1}),$$

gdje su redom primjenjene sljedeće transformacije:

1) zamjena prvog i drugog retka

2) prvi redak pomnožen s -2 i dodan drugom retku

3) drugi redak pomnožen s 2 i dodan prvom retku

4) prvi redak pomnožen s -1.

Odavdje jednostavno pročitamo desni dio matrice $(I|A^{-1})$: to je tražena inverzna matrica

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Zadatak 6.16: *Koristeći matrične transformacija odredite inverz sljedećih matrica:*

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Poglavlje 7

Pojam funkcije, grafa i inverzne funkcije

7.1 Domena i graf funkcije

Neka su X i Y dva neprazna skupa. Ako je po nekom pravilu, označimo ga sa f, svakom elementu x iz X pridružen točno jedan element y iz Y, kažemo da je na skupu X zadana funkcija f sa vrijednostima u Y. To simbolički označavamo sa $f : X \longrightarrow Y$.

Skup X nazivamo *područje definicije* ili *domena* funkcije f, a skup Y *područje vrijednosti* ili *kodomena* of f. Vrijednost x zovemo ponekad *varijabla*. Ako je kodomena funkcije f podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, kažemo da je f *realna* funkcija.

Neka je zadana funkcija $f : X \longrightarrow Y$. Podskup skupa Y,

$$f(X) = \{y|y = f(x), \quad x \in X\}$$

zove se *slika funkcije* f.

Graf realne funkcije realne varijable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ je skup točaka ravnine $\Gamma_f = \{(x, f(x)) = x \in X\}$.

Zadatak 7.1: *Izračunajte* $f(-1), f(0), f(1), f(3)$ *i* $f(5)$ *ako je* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$.

Rješenje. Redom uvrštavamo zadane vrijednosti na mjesto varijable x u pravilu pa imamo:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5 = -1 - 3 - 2 - 5 = -11$$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 1 - 3 + 2 - 5 = -5.$$

□

Zadatak 7.2: *Neka je* $f(x) = 2x + 3$. *Odredite:*

a) $f(-2), f(1)$ *i* $f(\frac{1}{4})$

b) $f(a^2)$

c) $f^2(a)$

d) $f(1) - f(-1)$ *i* $f(a^2 + 1) - f^2(a + 1)$.

Rješenje.

b) $f(a^2) = 2a^2 + 3$

c) $f^2(a) = (2a + 3)^2$.

□

Zadatak 7.3: *Odredite* $f(0), f(-1)$ *i* $\frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})$ *ako je* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Funkcije oblika $f(x) = ax + b$ nazivamo linearne funkcije. Njihov je graf pravac $y = ax + b$.

Zadatak 7.4: *Odredite linearnu funkciju* $f(x) = ax + b$ *i nacrtajte njen graf ako je*

a) $f(-2) = 10$ *i* $f(1) = -5$

b) $f(-3) = 3$ *i* $f(b) = 0$.

Rješenje.

a) $f(-2) = 10 \;\Rightarrow\; a(-2) + b = 10, \quad f(1) = 5 \;\Rightarrow\; a + b = 5$

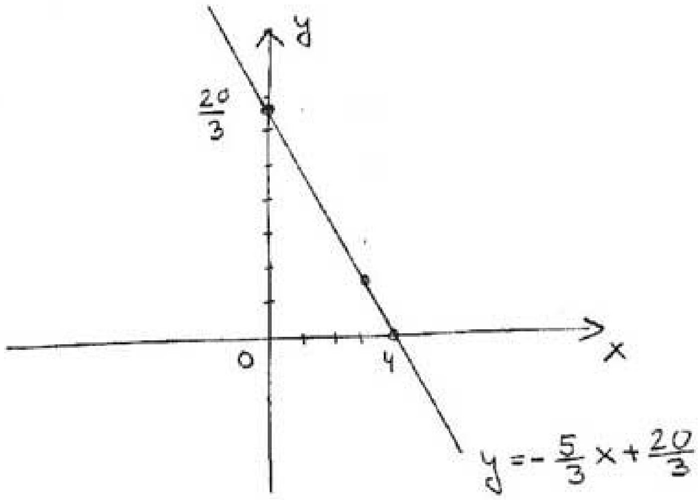
Dakle, rješavamo sustav $-2a + b = 10,\ a + b = 5$ što daje $a = -\frac{5}{3},\ b = \frac{20}{3}$ pa je tražena funkcija $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$ (vidi Sliku 7.1).

□

Zadatak 7.5: *Odredite kvadratnu funkciju* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *ako je:*

a) $f(-1) = -1, f(3) = -3$ *i* $f(6) = 12$

b) $f(-\sqrt{2}) = -4, f(2) = -5$ *i* $f(2\sqrt{2}) = -7$.



Slika 7.1: Rješenje zadatka 7.4. a)

Zadatak 7.6: *Neka je dano pridruživanje:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 3x, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Da li je f funkcija?

Rješenje. Dano pridruživanje nije funkcija jer po pravilu za interval $[0,1]$ imamo $f(1) = 2$ a po pravilu za interval $[1,2]$ slijedi da je $f(1) = 3$ što znači da su broju 1 pridružene dvije različite vrijednosti. $\square$

Zadatak 7.7: *Izračunajte $f(x+1)$ ako je $f(x-1) = x^2$.*

Rješenje. Problem je što umjesto $f(x)$ imamo zadano $f(x-1)$. Zato radimo supstituciju $t = x - 1 \;\Rightarrow\; x = t + 1$ pa dobivamo $f(t) = (t+1)^2$ iz čega slijedi da je $f(x+1) = (x+1+1)^2 = (x+2)^2$. $\square$

7.2 Injektivnost, surjektivnost i bijektivnost

Funkcije mogu imati različita svojstva. Za funkciju $f : X \longrightarrow Y$ kažemo da je *injekcija* ako za bilo koja dva elementa $x_1, x_2 \in X$ iz $x_1 \neq x_2$ slijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$ ili, ekvivalentno tome, ako iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Ako je $f(X) = Y$, tj. ako za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $f(x) = y$, kažemo da je f *surjekcija*. Za funkciju koja je istovremeno i surjekcija i injekcija, kažemo da je *bijekcija*.

Zadatak 7.8: *Provjerite injektivnost slijedećih funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:*

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = 3x^2 + 1$

d) $f(x) = x^3$.

Rješenje.

a) Ova funkcija očito nije injektivna jer je $f(x) = 3$ za svako x pa možemo npr. uzeti $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ i imamo $f(x_1) = f(x_2)$ iako je $1 \neq 2$.

b) Koristit ćemo drugi kriterij injektivnosti da pokažemo da je ova linearna funkcija injektivna. Želimo da iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Imamo

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \;\Rightarrow\; 2x_1 = 2x_2 \;\Rightarrow x_1 = x_2$$

pa je to injektivna funkcija. Općenito vrijedi da su linearne funkcije injektivne.

c) Kako je $(-x)^2 = x^2$ lako ćemo naći primjer koji pokazuje da kvadratna funkcija $f(x) = 3x^2 + 1$ nije injektivna. Uzmemo $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$ pa imamo $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$ i s druge strane $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4$. Jer je $1 \neq -1$ pokazali smo da funkcija nije injektivna.

$\square$

Injektivnost funkcije se ponekad može postići ograničenjem (restrikcijom) domene.

Zadatak 7.9: *Ograničite domenu slijedeći funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tako da one postanu injektivne:*

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = |x + 1|$

c) $f(x) = \sin x$.

Rješenje.

a) Ovdje možemo uzeti npr. samo pozitive x-eve odnosno domenu sa $\mathbb{R}$ restringirati na $\mathbb{R}_+ = \{\ x \geq 0\ | x\ \in \mathbb{R}\ \}$. Sada imamo:

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; |x_1| = |x_2| \;\Rightarrow x_1 = x_2$$

jer su x_1 i x_2 pozitivni pa $|x_1| = x_1$ i $|x_2| = x_2$.

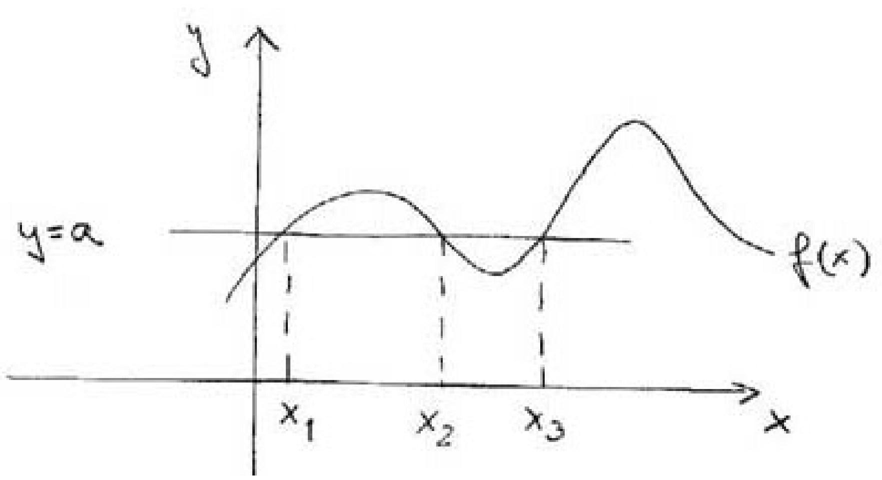
$\square$

Zadatak 7.10: *Neka je* $f(x) = x^2 + 1$. *Odredite* Y *tako da* $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ *bude surjekcija.*

Rješenje. Ako je $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ surjekcija onda za svako $y \in Y$ mora postojati $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = y$. To znači da je $y = x^2 + 1$. Jer je $x^2 \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ slijedi da je $y = x^2 + 1 \geq 1$. Prema tome, ako definiramo $Y = [1, +\infty)$ imamo surjektivnost jer u tom slučaju za dani y odgovarajući x ima oblik $\sqrt{y-1}$. □

Surjektivnost i injektivnost se lako mogu vidjeti iz grafa funkcije:

1) injektivnost: povlačimo pravce paralelene s x-osi, tj. pravce oblika $y = b$. Ako graf funkcije presiječemo s nekim takvim pravcem u više od jedne točke to znači da funkcija nije injektivna. Naime, te točke presjeka imaju koordinate (x_1, b) i (x_2, b) gdje je $x_1 \neq x_2$. Jer leže na grafu slijedi da je $f(x_1) = f(x_2) = b$ (vidi Sliku 7.2).



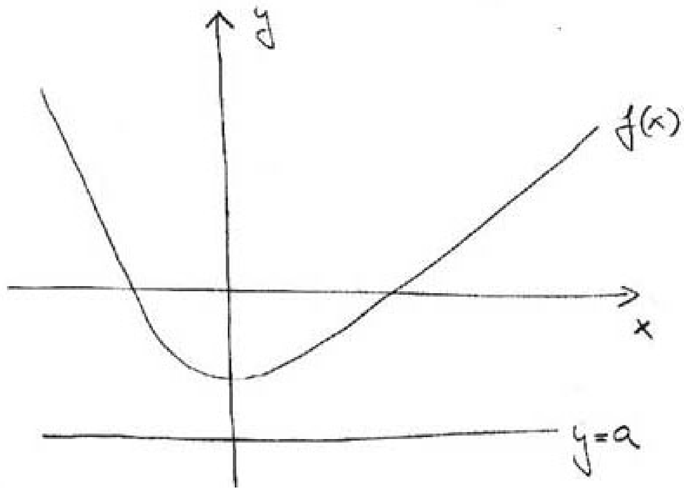
Slika 7.2: Grafička provjera injektivnosti

2) surjektivnost: ponovno povlačimo pravce paralelne s x-osi tj, one oblika $y = b$ za neko b. Ako nađemo b takav da je b u kodomeni Y zadane funkcije f, ali pravac $y = b$ ne siječe graf te funkcije, to znači da dana funkcija $f : X \longrightarrow Y$ nije surjektivna. Naime, za taj $b \in Y$ nema odgovarajućeg $x \in X$ takvog da $f(x) = b$ jer bi inače pravac $y = b$ sijekao graf u točki $(x, f(x)) = (x, b)$. (vidi Sliku 7.3).

Zadatak 7.11: *Provjerite grafički injektivnost i surjektivnost slijedećih funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 + 3$

b) $f(x) = |x + 1|$



Slika 7.3: Grafička provjera surjektivnosti

c) $f(x) = x + 3$.

Rješenje.

a) Gledamo da li možemo naći pravac oblika $y = b$ koji bi sjekao naš graf u barem dvije točke, uzmemo npr. $y = 5$ i vidimo da funkcija nije injektivna (vidi Sliku 7.4). Sada tražimo $y = b$ takav da ne siječe graf niti u jednoj točki, to je npr $y = 1$ pa f nije ni surjektivna (vidi Sliku 7.5).

□

7.3 Kompozicija funkcija i inverzna funkcija

Neka su zadane dvije funkcije, $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y_1 \longrightarrow Z$ uz uvjet $Y \subset Y_1$. Funkcija koja svakom elementu $x \in X$ pridružuje element $g(f(x)) \in Z$ zove se kompozicija funkcija f i g i označava sa $g \circ f$. Dakle, po definiciji je

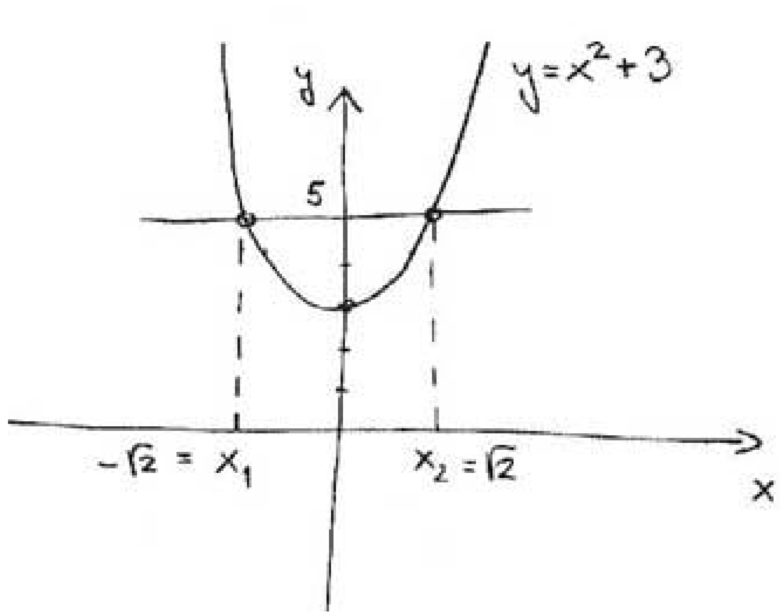
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Neka je sada $f : X \longrightarrow Y$ bijekcija. Onda za svaki element $y \in f(x)$ postoji jedinstveni $x \in X$ takav da je $y = f(x)$. To nam omogućuje da definiramo novu funkciju, f^{-1}. Funkcija $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ koja svakom elementu $y \in f(X)$ pridružuje $x \in X$ sa svojstvom da $f(x) = y$ zove se inverzna funkcija polazne funkcije f. Primijetimo da vrijedi:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{i} \qquad (f \circ f^{-1}) = f(f^{-1}(y)) = y$$

pa je

$$f^{-1} \circ f = id_X \qquad \text{i} \qquad f \circ f^{-1} = id_Y.$$



Slika 7.4: Rješenje Zadatka 7.11 a) - grafički dokaz neinjektivnosti

Zadatak 7.12: *Neka je* $f(x) = x^3 - x$. *Odredite:*

a) $f \circ f$

b) $(f \circ (f \circ f))^{-1}$.

Zadatak 7.13:

a) *Neka je* $f(x) = x + 2$, $g(x) = 3 - x^2$. *Da li vrijedi* $f \circ g = g \circ f$*? Za koje* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$*?*

b) *Neka je* $f(x) = x + 2$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ *i* $h(x) = x^2 + 3$. *Provjerite:* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Navedena tvrdnja, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, vrijedi za sve funkcije f, g i h za koje su te kompozicije dobro definirane, tj. operacija kompozicije ima svojstvo asocijativnosti.

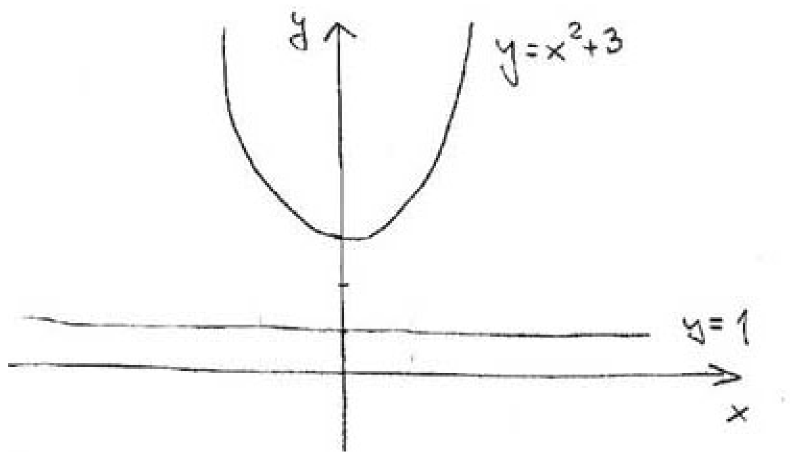
Zadatak 7.14: *Za funkciju* $f(x)$ *izračunajte inverznu funkciju ako je*

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = \log \frac{x}{2}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

d) $f(x) = (5 + 3^x)^2$.



Slika 7.5: Rješenje Zadatka 7.11 a) - grafički dokaz nesurjektivnosti

Rješenje.

a) Prvo trebamo odrediti područje na kojem je zadana funkcija bijektivna. Imamo $x^2 - 1 \geq -1$ pa ćemo kodomenu ograničiti na $[-1, +\infty)$. Ako domenu ograničimo na $x \geq 0$ imamo i injektivnost: $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ jer $|x| = x$ ako $x \geq 0$. Stoga promatramo $f : [0, +\infty) \longrightarrow [-1, +\infty)$ i tu se inverz dobiva na slijedeći način: stavimo $y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$ pa je $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$. To je, zbog ograničenja kodomene na $[-1, +\infty]$ dobro definirano (vidi sliku).

b) Domena ove funkcije je $x > 0$ zbog svojstava logaritma. Iz istih razloga je kodomena čitav $\mathbb{R}$. Injektivnost imamo na čitavoj domeni jer $\log\frac{x_1}{2} = \log\frac{x_2}{2} \Rightarrow 10^{\log\frac{x_1}{2}} = 10^{\log\frac{x_2}{2}} \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Znači, imat ćemo $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ i nalazimo je na sljedeći način: $y = \log\frac{x}{2} \Rightarrow 10^y = 10^{\log\frac{x}{2}} \Rightarrow 10^y = \frac{x}{2}$ pa $2 \cdot 10^y = x$ i konačno $f^{-1}(y) = 2 \cdot 10^y$.

□

Graf inverzne funkcije dobijemo tako da preslikmo graf početne funkcije oko pravca $y = x$.

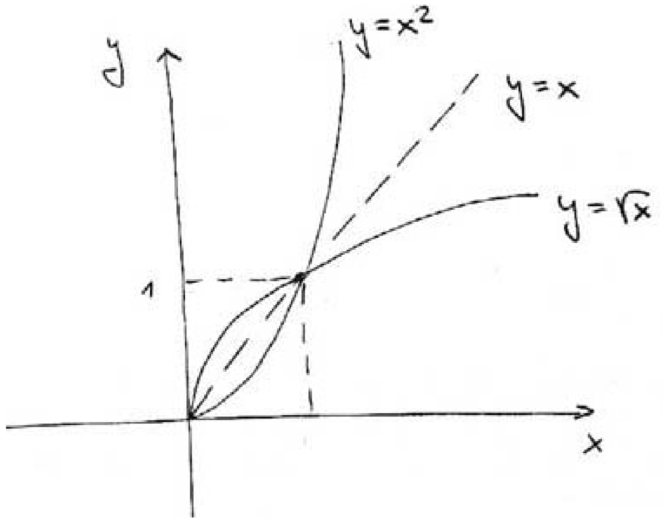
Zadatak 7.15: *Nacrtajte graf inverzne funkcije ako je početna funkcija zadana s:*

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = -x + 1$

c) $f(x) = x^3 - 1$

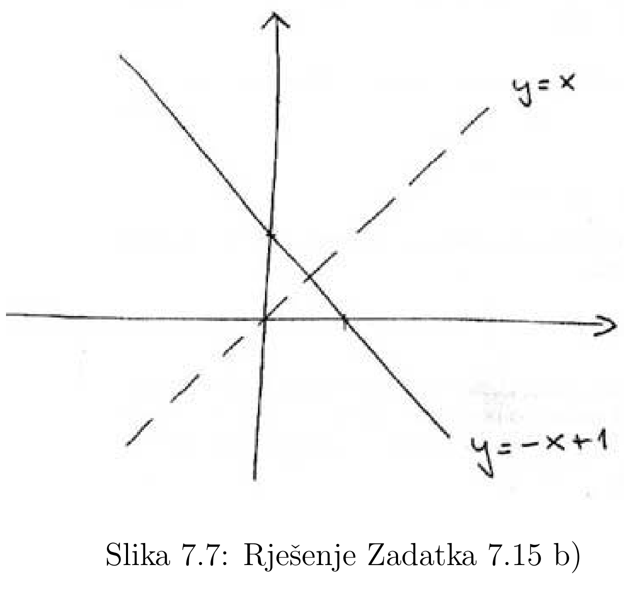
Rješenje.



Slika 7.6: Rješenje Zadatka 7.15 a)

a) Funkcija $f(x) = x^2$ bijektivna je ako joj npr. ograničimo domenu na $x \geq 0$ a kodomenu na $y \geq 0$. Tu je inverz dan sa $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ (vidi Sliku 7.6).

b) Linearne funkcije su sve bijektivne pa možemo odmah tražiti inverz: $y = -x + 1 \;\Rightarrow\; y - 1 = -x \;\Rightarrow x = -y + 1$ i dobivamo $f^{-1}(y) = -y + 1$. Zaključujemo da je graf inverzne funkcije istovjetan grafu početne funkcije (vidi Sliku 7.7).



Slika 7.7: Rješenje Zadatka 7.15 b)

□

7.4 Parnost i neparnost

Funkciju $f(x)$ definiranu u simetričnom području $-l < x < l$ (ovdje $l \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$) nazivamo parnom ako je $f(-x) = f(x)$ i neparnom ako je $f(-x) = -f(x)$ za svako x iz domene od f.

Zadatak 7.16: *Odredite parnost ili neparnost slijedećih funkcija:*

a) $f(x) = x^2 - x^4$

b) $f(x) = \sin(\cos x)$

c) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

d) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$

e) $f(x) = \frac{|x|+1}{(1-x^2)\sin x}$

f) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

Rješenje.

a) Jednostavno uvrštavamo $-x$ umjesto x i imamo:

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 = f(x)$$

što pokazuje da je funkcija parna.

b) $f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = f(x)$
i vidimo da je f parna funkcija jer je cos paran.

c) $f(-x) = \sqrt{1+(-x)+(-x)^2} - \sqrt{1-(-x)+(-x)^2} = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2} = -(-\sqrt{1-x+x^2} + \sqrt{1+x+x^2}) = -f(x)$
pa je f neparna funkcija.

$\square$

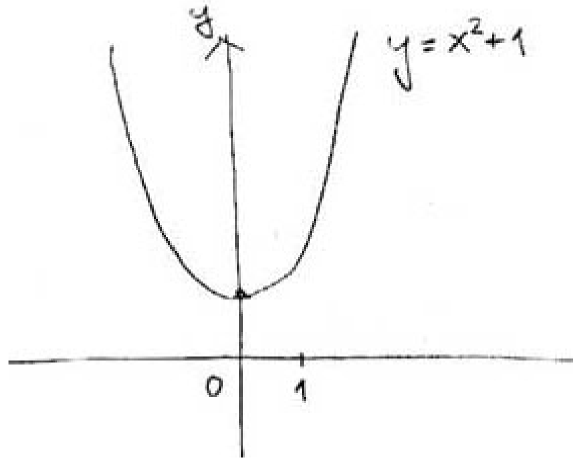
Parnost ili nepranost se može iščitati i iz grafa funkcije: graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os y, a graf neparne dobijemo tako da nacrtamo funkciju na području $x \geq 0$, preslikamo dobiveno prvo oko osi y pa onda oko osi x.

Zadatak 7.17: *Odredite pomoću grafa parnost ili neparnost slijedećih funkcija:*

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \sin x$

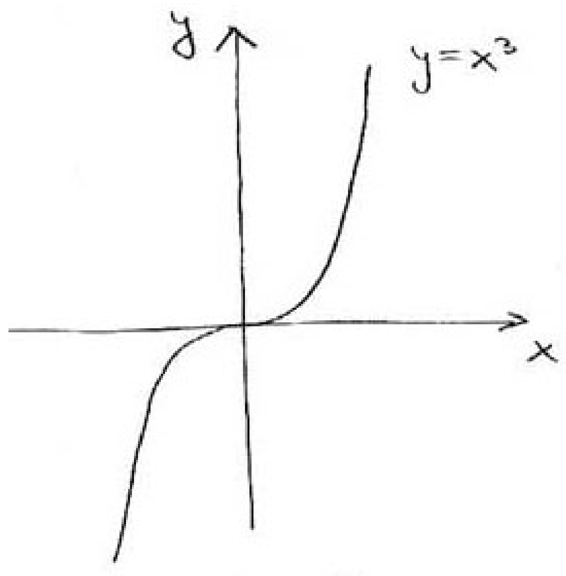


Slika 7.8: Graf funkcije $f(x) = x^2 + 1$ - primjer parne funkcije

Rješenje.

a) Graf je očito simetričan s obzirom na os y (vidi Sliku 7.8) pa zaključujemo da je funkcija parna.

b) Iz grafa funkcije je jasno da dio grafa za $x < 0$ možemo dobiti tako da graf za $x \geq 0$ preslikamo oko osi y pa zatim oko osi x. Stoga je to neparna funkcija (vidi Sliku 7.9).



Slika 7.9: Graf funkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

□

Poglavlje 8

Elementarne funkcije. Funkcije važne u primjenama

Zadatak 8.1: *Napišite po jedan primjer za rastuću i padajuću linearnu funkciju.*

Zadatak 8.2: *Nađite linearnu funkciju čiji graf prolazi točkama* $(0,1)$ *i* $(1,-1)$. *Je li ta funkcija rastuća ili padajuća? Napišite još tri točke kojima prolazi graf te funkcije.*

Rješenje. Znamo da svaka linearna funkcija ima oblik $f(x) = ax + b$, gdje su a i b parametri (a je koeficijent smjera, a b odsječak na osi y). Pripadna veza između x i y koordinate glasi stoga $y = ax + b$. Uvrštavanjem zadanih točaka dobivamo sljedeći sustav od dvije jednadžbe u nepoznanicama a i b:

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ a + b &= -1, \end{aligned}$$

rješavanjem kojeg odmah dobivamo da je $a = -2$, $b = 1$, pa tražena linearna funkcija glasi $f(x) = -2x + 1$. Kako je koeficijent smjera negativan, funkcija je padajuća.

Da bismo napisali još tri točke kojima prolazi graf te funkcije, dovoljno je u $y = -2x + 1$ uvrstiti neke tri vrijednosti za x (recimo $x = 2$, $x = 3$ i $x = 4$) i izračunati odgovarajući y). □

Zadatak 8.3: *Je li funkcija iz prethodnog zadatka bijekcija? Ako jest, nađite i nacrtajte grafove funkcija* f *i* f^{-1}.

Rješenje. Da bismo dokazali da je funkcija $f(x) = -2x+1$ bijekcija, treba pokazati da je injekcija i surjekcija:

(i) **f je injekcija:** mora vrijediti da za sve x_1 i x_2 takve da je $f(x_1) = f(x_2)$ nužno slijedi da je i $x_1 = x_2$. Računamo:

$$-2x_1 + 1 = -2x_2 + 1 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

i funkcija je očito injekcija.

(ii) **f je surjekcija:** mora vrijediti da za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$, što znači $-2x_0 + 1 = y_0$. No, odavdje možemo lako izračunati x_0:

$$-2x_0 + 1 = y_0 \Rightarrow -2x_0 = y_0 - 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}.$$

Dakle, traženi x_0 je $x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}$. Da je to dobar x_0 gotovo je očito, ali ipak provjeravamo da je $f(x_0) = y_0$:

$$f(x_0) = -2x_0 + 1 = -2(-\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}) + 1 = y_0 - 1 + 1 = y_0,$$

što je i treablo dobiti. Ovu operaciju možemo obaviti za sve $y_0 \in \mathbb{R}$, pa je f očito surjekcija.

Dakle (jer je i injektivna i surjektivna) f je bijekcija, pa ima inverznu funkciju f^{-1}:

$$f(x) = -2x + 1 \Rightarrow x = -2f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow 2f^{-1}(x) = -x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

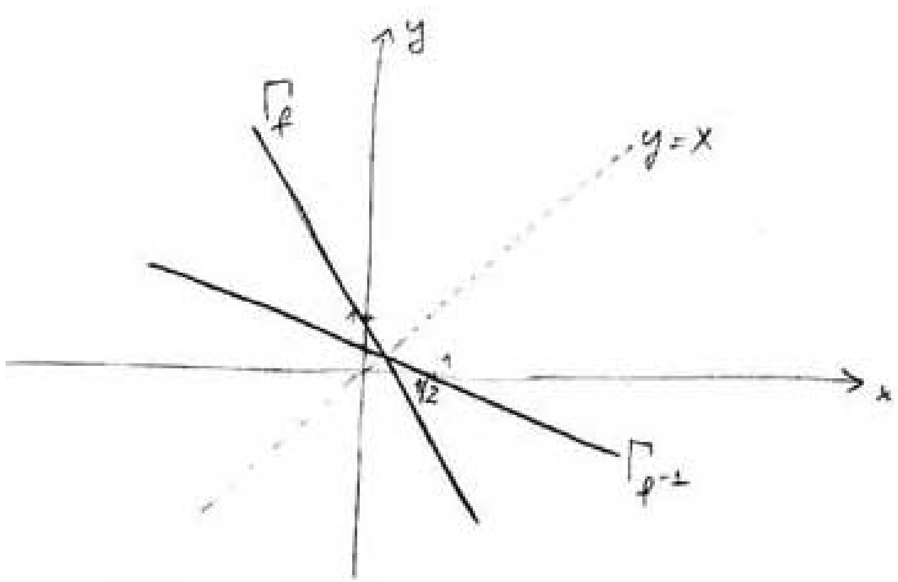
Još treba nacrtati grafove funkcija f i f^{-1}, što nije teško budući da su oni pravci. Koristimo pri crtanju informacije kao što su odsječak na osi y i koeficijent smjera. Primijetite da se graf funkcije f^{-1} dobiva zrcaljenjem grafa funkcije f obzirom na simetrali I i III kvadranta - pravac $y = x$:

□

Zadatak 8.4: *Nađite kvadratnu funkciju čiji graf prolazi točkama* $(0, 1)$, $(1, 1)$ *i* $(-1, 3)$. *Izračunajte koordinate točke tjemena. Je li to tjeme u ovom slučaju točka lokalnog minimuma ili maksimuma? Nađite intervale rasta i pada ove funkcije, te napišite još tri točke kojima prolazi graf te funkcije.*

Rješenje. Slično kao kod linearne funkcije, treba odrediti parametre koji definiraju kvadratnu funkciju. Kako se radi o funkciji $f(x) = ax^2 + bx + c$, vidimo da treba odrediti tri parametra, pa je za očekivati da će biti potrebno zadati i tri točke kroz koje graf funkcije mora prolaziti. Uvrštavanjem vrijednosti koordinata te tri točke u $y = ax^2 + bx + c$ dobivamo sustav

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ a + b + c &= 1 \\ a - b + c &= 3, \end{aligned}$$



Slika 8.1: Graf unkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

čije rješenje glasi: $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$. Dakle, kvadratna funkcija koju smo tražili je $f(x) = x^2 - x + 1$.

Kako je koeficijent a pozitivan, graf ove kvadratne funkcije će biti kokavna parabola ("okrenuta prema gore"), pa će točka tjemena biti točka lokalnog minimuma. Računamo je prema formuli

$$T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}),$$

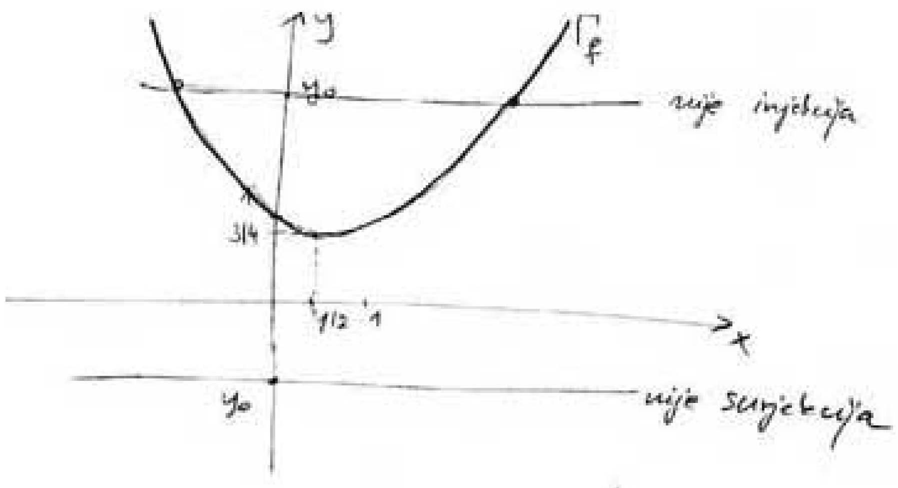
gdje je $D = b^2 - 4ac$ (tzv. "diskriminanta"). Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za a, b i c izlazi da je $T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ - to je dakle točka tjemena, ali ujedno i lokalnog minimuma.

U skladu lako se vidi (iz koveksnog oblika grafa i poznavanja točke tjemena) da funkcija pada na intervalu $< -\infty, \frac{1}{2} >$, a raste na intervalu $< \frac{1}{2}, \infty >$.

Da nađemo još tri točke kojima prolazi graf ove funkcije dovoljno je izabrati tri vrijednosti za x i uvrstiti ih u $y = x^2 - x + 1$ da dobijemo odgovarajuće vrijednosti za y. □

Zadatak 8.5: *Provjerite korištenjem garfa funkcije f iz prethodnog zadatka je li f bijekcija ako zadamo da su domena i kodomena čitav skup realnih brojeva? Ako nije, kako treba ograničiti kodomenu da ona postane surjekcija? Kako treba ograničiti domenu da ona postane injekcija?*

Rješenje. Funkcija nije bijekcija, u što se možemo lako uvjeriti ako nacrtamo njen graf:



Slika 8.2: Graf unkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

Naime, funkcija će biti bijekcija ako za svaki y_0 iz kodomene (svaki $y_0 \in \mathbb{R}$, tj. s $y-$osi) možemo naći **točno** jedan x_0 iz domene (točno jedan $x_0 \in \mathbb{R}$, tj. s $x-$osi) takav da je $f(x_0) = y_0$. To provjeravamo tako da povlačimo kroz y_0 pravac okomit na $y-$os, tražimo sjecište s grafom funkcije f i iz točke sjecišta povlačimo pravac okomit na $x-$os - na mjestu gdje taj pravac siječe $x-$os bi trebao biti traženi x_0. Dok je kod linearne funkcije takav postupak moguće provesti za svaki izbor y_0 s $y-$osi, lako vidimo da ovdje postoje sljedeći problemi:

(i) **f nije surjektivna:** za sve $y_0 < \frac{3}{4}$ (dakle, sve y_0 koji se nalaze "ispod" točke na $y-$ osi koja predstavlja $y-$koordinatu točke tjemena T) nije moguće provesti gore opisani postupak, jer pravac kroz takav y_0 okomit na $y-$os uopće neće sijeći graf funkcije f

(ii) **f nije injektivna:** za svaki $y_0 > \frac{3}{4}$ (dakle, sve y_0 koji se nalaze "iznad" točke na $y-$ osi koja predstavlja $y-$koordinatu točke tjemena T) pravac kroz y_0 okomit na $y-$os siječe graf funkcije f, ali ne u točno jednoj točki, već uvijek u dvije točke, što se kosi s defincijom injektivnosti.

Dakle, f nije bijekcija (kao, uostalom, niti jedna druga kvadratna funkcija). Međutim, moguće je **ograničiti** domenu i kodomenu da ona postane bijekcija:

(i) **ograničenje kodomene - postizanje surjektivnosti:** treba uzeti da je kodomena jednaka intervalu $[\frac{3}{4}, \infty >$ jer ćemo tada imati surjektivnost - ona zahtijeva da za svaki y_0 **postoji** x_0 takav da je $f(x_0) = y_0$, dakle **barem jedan** takav x_0 - a to će u slučaju ovakvog izbora kodomene sigurno biti ispunjeno

(ii) **ograničenje domene - postizanje injektivnosti:** možemo uzeti da je kodomena jednaka intervalu $< -\infty, \frac{1}{2}]$ **ili** $[\frac{1}{2}, \infty >$. Naime, injektivnost zahtijeva da za svaki y_0 iz kodomene postoji **najviše** jedan x_0 takav da je $f(x_0) = y_0$. S obzirom da parabola ima dva kraka, lijevi i desni, moramo se odlučiti za samo jedan od njih - točka tjemena (točnije, njena $x-$koordinata) govori kako moramo "podijeliti" domenu da ona definira injektivnu funkciju - ako se odlučimo za interval $< -\infty, \frac{1}{2}]$ odabrali smo lijevi krak parabole, a uz $[\frac{1}{2}, \infty >$ odlučili smo se za desni krak. Oba izbora su dobra, pa se ovdje možemo odlučiti za npr. desni krak, tj. definirati da je domena dana s $[\frac{1}{2}, \infty >$.

Dakle, možemo za $f(x) = x^2 - x + 1$ definirati $f : [\frac{1}{2}, \infty > \to [\frac{3}{4}, \infty >$ - tako definirana funkcija f bit će bijekcija. $\square$

Zadatak 8.6: *Pokažite računski da funkcija iz prethodnog zadatka nije bijekcija.*

Rješenje. Pokazujemo da $f(x) = x^2 - x + 1$ nije bijekcija:

(i) **f nije injekcija:** Treba pokazati da iz $f(x_1) = f(x_2)$ ne slijedi nužno da je $x_1 = x_2$:

$$
\begin{aligned}
x_1^2 - x_1 + 1 &= x_2^2 - x_2 + 1 \\
x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_2 &= 0 \\
(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) &= 0 \\
(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Vidimo da očito postoje dvije mogućnosti:

(1) $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

(2) $x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 + 1$,

pa ne slijedi nužno da je $x_1 = x_2$. Dakle, f nije injekcija.

(ii) **f nije surjekcija:** Treba vidjeti da za sve $y_0 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$:

$$
\begin{aligned}
x_0^2 - x_0 + 1 &= y_0 \\
x_0^2 - x_0 + 1 - y_0 &= 0,
\end{aligned}
$$

što možemo shvatiti kao jednadžbu po x_0. Ta će jednadžba imati **realna** rješenja (a takve x_0 tražimo) ako je diskriminanta D nenegativna:

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (1 - y_0) = 4y_0 - 3 \geq 0,$$

dakle ako je $y_0 \geq \frac{3}{4}$. Očito dakle samo za takve $y_0 \in \mathbb{R}$ postoje x_0 takvi da je $f(x_0) = y_0$ (njih dobivamo rješavanjem gornje kvadratne jednadžbe po x_0). Međutim, za $y < \frac{3}{4}$ takvi x_0 ne postoje, jer gornja kvadratna jednadžba uopće nema realnih rješenja. Dakle, ako za kodomenu uzmemo čitav skup realnih brojeva, f nije surjektivna.

□

Zadatak 8.7: *Odredite intervale rasta i pada, točku tjemena, te točke presjeka s $x-$osi (realne nultočke) za sljedeće kvadratne funkcije:*

a) $f(x) = -x^2 - x + 6$

b) $g(x) = x^2 + 3x - 3$

c) $h(x) = x^2 - 2x + 4.$

Rješenje. Točku tjemena funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ tražimo prema formuli

$$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}),$$

gdje je $D = -b^2 + 4ac$. Pri tom vrijedi:

i) ako je $D > 0$ funkcija ima dvije realne nultočke dane s

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

i graf funkcije u dvije točke siječe $x-$os

ii) ako je $D = 0$ funkcija ima dvostruku realnu nultočku danu s

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

i graf funkcije u jednoj točki siječe (točnije, dodiruje) $x-$os - ta točka je ujedno i točka tjemena grafa

iii) ako je $D < 0$ funkcija nema realnih nultočaka (obje nultočke su kompleksni brojevi) - graf funkcije ne siječe $x-$os. Ove kompleksne nultočke su dane istom formulom kao realne nultočke pod i) (samo je sada $D < 0$ pa su x_1 i x_2 kompleksni).

Intervale rasta i pada dobijemo tako da $x-$koordinata točke tjemena ($x_0 = -\frac{b}{2a}$) dijeli domenu (čitav skup realnih brojeva) na dva intervala: $< -\infty, x_0 >$ i $< x_0, \infty >$ - jedan od ta dva intervala je interval rasta, a drugi pada, ovisno o tome je li $a > 0$ ili $a < 0$:

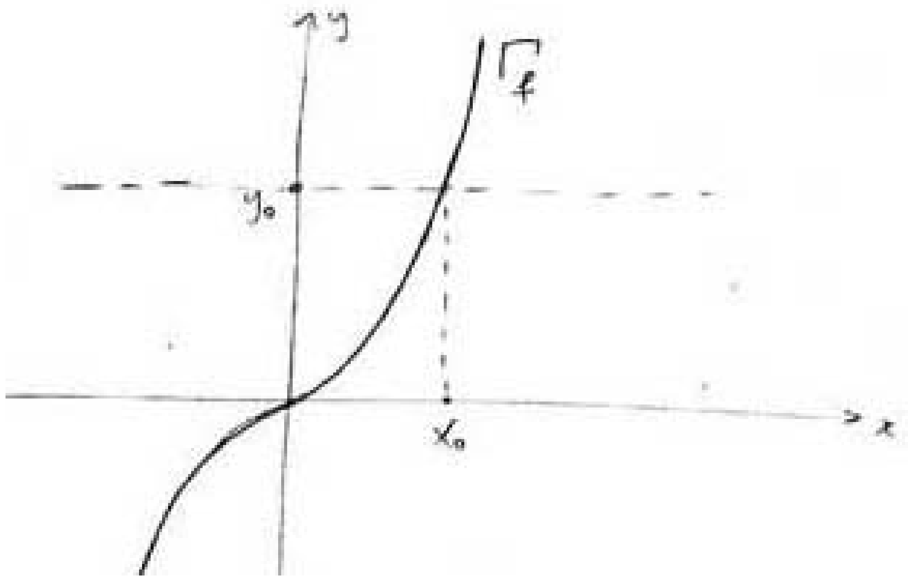
i) ako je $a > 0$ graf je "okrenut prema gore" (konveksan), tjeme predstavlja točku lokalnog minimuma i u skladu s tim $< -\infty, x_0 >$ je interval pada, a $< x_0, \infty >$ je interval rasta

ii) ako je $a < 0$ graf je "okrenut prema dolje" (konkavan), tjeme predstavlja točku lokalnog maksimuma i u skladu s tim $< -\infty, x_0 >$ je interval rasta, a $< x_0, \infty >$ je interval pada.

Pokušajte sami prema ovim pravilima riješiti zadatak. □

Zadatak 8.8: *Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x) = x^3$ i $g(x) = (x-1)^3 + 2$. Jesu li te funkcije bijekcije? Napišite f^{-1} i g^{-1} ako jesu.*

Rješenje. Graf funkcije f je kubna parabola koja raste na cijeloj domeni, siječe x-os u $x = 0$, a $(0,0)$ je ujedno i točka infleksije:



Slika 8.3: Graf unkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

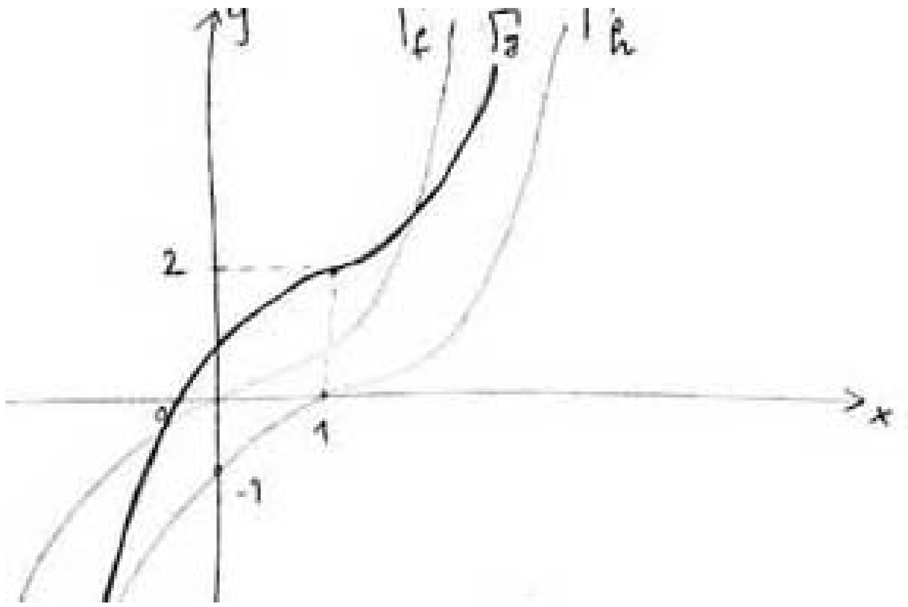
Iz grafa funkcije f vidimo da je ona bijekcija, jer za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji **jedinstveni** $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$.

Da nađemo inverz funkcije f u izrazu $y = x^3$ radimo formalnu zamjenu varijabli x i y i računamo eksplicitno y:

$$x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x},$$

pa je $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.

Graf funkcije $g(x) = (x-1)^3 + 2$ dobiva se iz grafa funkcije f translacijom: -1 označava da graf funkcije $f(x) = x^3$ translatiramo udesno duž $x-$osi za 1 - time dolazimo do grafa pomoćne funkcije $h(x) = (x-1)^3$, dok $+2$ označava da graf funkcije $h(x) = (x-1)^3$ translatiramo za 2 prema gore duž $y-$osi - time dolazimo do grafa funkcije g:



Slika 8.4: Graf unkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

Jasno je da je i ova funkcija bijekcija, jer je njen graf jednak grafu funkcije f, uz određeni translatorni pomak. Računamo g^{-1}:

$$x = (y-1)^3 + 2 \Rightarrow (y-1)^3 = x - 2 \Rightarrow y - 1 = \sqrt[3]{(x-2)} \Rightarrow y = \sqrt[3]{(x-2)} + 1,$$

odakle izlazi da je $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x-2)} + 1$. □

Zadatak 8.9: *Napišite primjer jedne rastuće i jedne padajuće eksponencijalne funkcije.*

Zadatak 8.10: *Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3^x$, pokažite na svojstvima grafa da je bijekcija i nacrtajte na istoj slici inverznu funkciju te funkcije. Kako se zove ta inverzna funkcija?*

Zadatak 8.11: *Riješite jednadžbe:*

a) $2^x = 8$

b) $\log_2 x = 3$

c) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2$.

Rješenje. i) Rješavamo zadatak djelovanjem inverznom funkcijom funkcije $f(x) = 2^x$, tj. funkcijom logaritmiranja po bazi 2 i koristimo svojstvo $\log_a a^x = x$:

$$2^x = 8/\log_2$$
$$x = \log_2 8 = \log_2 2^3$$
$$x = 3.$$

ii) Kao u prethodnom zadatku, djelujemo inverznom funkcijom funkcije $f(x) = \log_2 x$, tj. eksponencijalnom funkcijom s bazom 2 i koristimo svojstvo $\log_a a^x = x$:

$$\log_2 x = 3/2^-$$
$$x = 2^3$$
$$x = 8.$$

iii) Prepoznajemo da je $4^x = (2^x)^2$, pa uz supstituciju $2^x = t$ imamo

$$t^2 - 3t + 2,$$

čija su rješenja dana s $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Stoga imamo dva rješenja:

$$2^x = 1/\log_2 \Rightarrow x = \log_2 1 = 0$$
$$2^x = 2/\log_2 \Rightarrow x = \log_2 2 = 1.$$

□

Zadatak 8.12: *Pokažite da funkcija* $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *dana s* $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ *nije injekcija.*

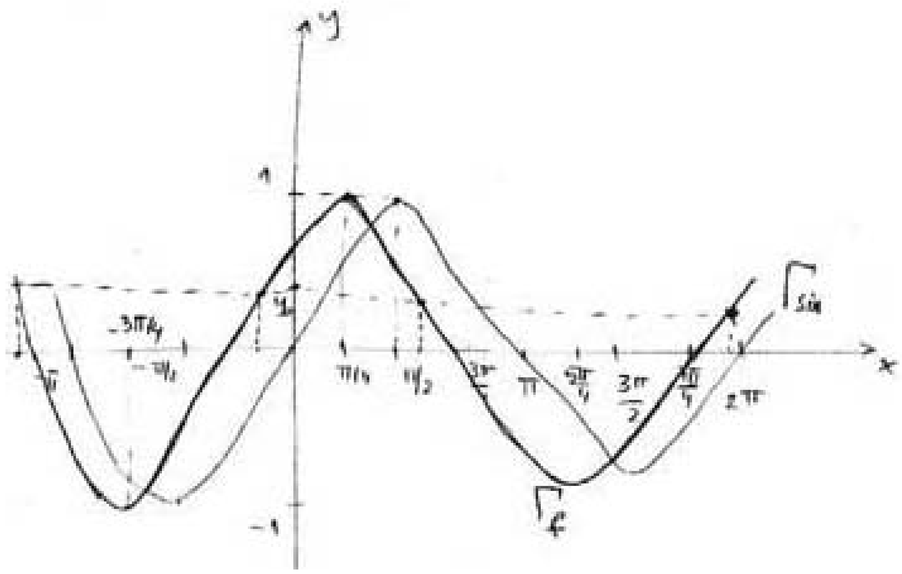
Rješenje. Graf funkcije f dobivamo pomakom grafa funkcije $g(x) = \sin x$ za $\frac{\pi}{4}$ ulijevo duž $x-$osi:

Očito je da ta funkcija nije injekcija, jer za svaki $y_0 \in [-1, 1]$ postoji beskonačno mnogo različitih x_0 takvih da je $f(x_0) = y_0$ - naime, pravac kroz y_0 okomit na $y-$os siječe graf funkcije f u beskonačno mnogo točaka. □

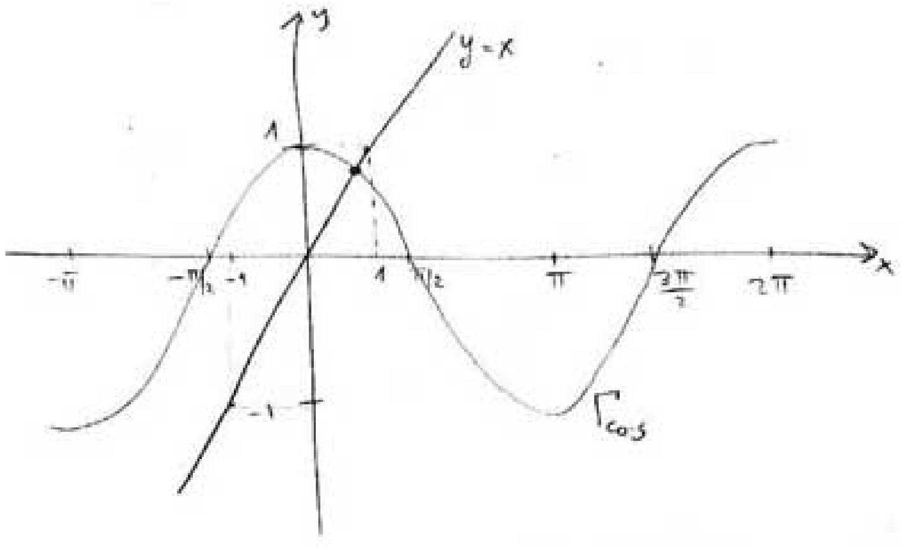
Zadatak 8.13: *Pokažite grafički da jednadžba* $\cos x = x$ *ima samo jedno realno rješenje.*

Rješenje. Ovu ćemo jednadžbu riješiti tako da nacrtamo grafove dvije funkcije $f(x) = \cos x$ i $g(x) = x$ - jednadžba $f(x) = g(x)$ (tj. upravo $\cos x = x$) ima geometrijskog značenje presjeka krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$ - broj točaka presjeka tih krivulja odgovara broju realnih rješenja zadane jednadžbe. Nacrtajmo na istoj slici grafove tih funkcija:

Vidimo da postoji samo jedna točka presjeka tih krivulja, pa i jednadžba ima samo jedno rješenje. □



Slika 8.5: Graf unkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije



Slika 8.6: Graf unkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

Poglavlje 9

Pojam derivacije, geometrijsko i fizikalno značenje. Svojstva derivacija. Derivacije elementarnih funkcija

9.1 Limesi

Limes funkcije $f(x)$ kada x teži nekoj točki a (ovdje a može označavati i $\pm\infty$) možemo intuitivno shvatiti kao vrijednost kojoj funkcija f teži kada x ide u a. Označavamo ga sa $\lim_{x\to a} f(x)$ i on može, ali i ne mora postojati.

Zadatak 9.1: *Odredite sljedeće limese:*

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4+6x+2}$

(c) $\lim_{x\to 2}(\sin x)$

Rješenje. (a) Ako x ide u ∞, onda x^2+1 ide također u ∞ pa imamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} \text{"} = \text{"} \frac{1}{\infty} = 0$$

(b) Funkcija $f(x) = \frac{2}{x^4+6x+2}$ je dobro definirana u nuli pa samo uvrstimo $x=0$ i dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4+6x+2} = \frac{2}{0+0+2} = 1$$

(c) Analogno kao i gore:

$$\lim_{x\to 2}(\sin x) = \sin 2$$

□

Vrijedi sljedeće: ako postoje limesi $\lim_{x\to a} f_1(x)$ i $\lim_{x\to a} f_2(x)$, onda

1) $\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x)$,

2) $\lim_{x\to a} f_1(x)f_2(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$,

3) $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}$ ako $\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0$.

Zadatak 9.2: *Nađite sljedeće limese koristeći gornja svojstva limesa:*

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x} \cdot (x^2 + 7x - 3)$

(b) $\lim_{x\to 3}(e^x + 2\sqrt{3x})$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+6}{x^3+x+1}$

Rješenje. (a) Imamo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} \cdot (x^2 + 7x - 3) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} \cdot \lim_{x\to 1}(x^2 + 7x - 3) =$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} \cdot (\lim_{x\to 1}(x^2) + \lim_{x\to 1}(7x - 3)) = \frac{0}{2} \cdot (1 + 4) = 0 \cdot 5 = 0$$

(c) Imamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+6}{x^3+x+1} = \frac{\lim_{x\to 0}(2x+6)}{\lim_{x\to 0}(x^3+x+1)} =$$
$$= \frac{0+6}{0+0+1} = \frac{6}{1} = 6$$

□

Ako tražimo limes kvocijenta dvaju polinoma u x kada $x \to \infty$, preporučljivo je oba člana kvocijenta prethodno podijeliti sa x^n gdje je n najveća potencija tih polinoma. analogno postupamo i u mnogim slučajevima razlomaka sa iracionalnim izrazima.
Ako su, nadalje, $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi i $P(a) \neq 0$ ili $Q(a) \neq 0$, limes

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dobivamo direktno. U slučaju da $P(a) = Q(a) = 0$, razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dijelimo sa $(x - a)$ onoliko puta dok ne dođemo u situaciju gdje možemo računati direktno.

Zadatak 9.3: *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+6x^3+3x+1}{x^5+6}$ *(e)* $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x+\sqrt[3]{x}}$ *(f)* $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ *(g)* $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

(d) $\lim_{h\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^3-3x^2+4x-2}$ *(h)* $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$

Rješenje. (a) Dijelimo s najvećom potencijom od x i brojnik i nazivnik, a to je očito x^5:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+6x^3+3x+1}{x^5+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{6}{x^5}} = \frac{2}{1} = 2$$

jer faktori oblika $\frac{a}{x^n}$ gdje je a neka konstanta a n prirodan broj očito idu u nulu ako x ide u ∞.

(c) Oba polinoma (i onaj u brojniku i onaj u nazivniku) poprimaju konkretnu vrijednost za $x = 2$. Kako vrijednost nazivnika nije nula, limes dobivamo direktno:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{2^3-3\cdot 2+2}{2^4-4\cdot 2+3} = \frac{4}{11}$$

(e) Ovdje su za $x = 1$ i brojnik i nazivnik nula. Dijelimo, dakle, oiba polinoma sa $x-1$ i dobivamo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^3-3x^2+4x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{(x-1)(x^2-2x+2)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+3}{x^2-2x+2} = \frac{1+2+3}{1-2+2} = 6$$

□

Limese koji sadrže iracionalne izraze možemo često dovesti u racionalni oblik uvođenjem nove varijable. Drugi način rješavanja takvih limesa je prebacivanje iracionalnosti iz brojnika u nazivnik ili obrnuto.

1. Izračunajte:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$ (e) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{1})$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ (f) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1+x}}{x}$ (g) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

(d) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ (h) $\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$

Rješenje. (a) Koristimo jednakost $1-x=(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$ za racionalizaciju:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{(1-\sqrt[3]{x})}\frac{(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1-x}=$$
$$=\lim_{x\to 1}(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=3$$

(f) Opet racionaliziramo:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)\frac{(\sqrt{x(x+a)}+x)}{(\sqrt{x(x+a)}+x)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}+x}$$

Tu je najveća potencija u brojniku i nazivniku x pa dijelimo s tim:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2}$$

□

Za računanje limesa korisne su sljedeće formule:

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\quad\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Neka je $f(x)$ pozitivna funkcija u nekoj okolini točke a ($a\neq x$). Pri određivanju limesa oblika

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=C,$$

vrijedi sljedeće:

1) ako egzistiraju konačni limesi

$$\lim_{x\to a}f(x)=A>0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a}g(x)=B$$

gdje je $0\leq A\leq+\infty$ i $-\infty<B<+\infty$ tada je $C=A^B$.

2) ako je $\lim_{x\to a}f(x)=A\neq 1$ i $\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ onda C pronalazimo neposredno,

3) ako je $\lim_{x\to a}f(x)=1$ i $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$, onda stavljamo $f(x)=1+\alpha(x)$ gdje $\alpha(x)\to 0$ kada $x\to a$ i prema tome

$$C=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)g(x)}=e^{\lim_{x\to a}\alpha(x)g(x)}=e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}.$$

Koristeći gornja pravila lako dobivamo da je općenito

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Zadatak 9.4: *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\arctan \frac{\pi}{2}x}$

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}$

Rješenje. (a) Koristimo $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}}=\frac{5}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}}=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{7}$$

(b) Imamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1-\cos x}{\cos x})}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}}{\cos x}=8$$

jer $\cos 0=1$.

□

Zadatak 9.5: *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

(b) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$

(c) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

(e) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

(f) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Rješenje. (a) Ovo je slučaj (1) kod limesa oblika $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=C$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to 1}=\left(\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(e) Ovo je slučaj (3) jer imamo očito 1^∞.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{4}{x+3}\right)\right)^{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\left(-\frac{4}{x+3}\right)\right)^{-\frac{x+3}{4}}\right]^{-\frac{4}{x+3}}\right\}^{x+2} = \lim_{x\to\infty} e^{-4\frac{x+2}{x+3}} = e^{-4}$$

$\square$

Ako egzistira i pozitivan je $\lim_{x\to a} f(x)$, onda

$$\lim_{x\to a}(\ln f(x)) = \ln(\lim_{x\to a} f(x)).$$

Pomoću toga odmah dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.$$

Zadatak 9.6: *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2))$

(b) $\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}$

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{x^2}$

Rješenje. (a) Koristeći svojstva logaritamske funkcije dobivamo:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2)) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+2} = \ln 2$$

(e) Imamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left\{a^x-1=t,\ x=\frac{\ln(t+1)}{\ln a}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \ln a$$

$\square$

9.2 L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo: koristi se za neodređene oblike tipa $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Drugim riječima, ako imamo f i g funkcije takve da $\frac{f(x)}{g(x)}$ teži ka $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$ ako $x \to a$, onda je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pod uvjetom da limes kvocijenta derivacija postoji.

Ako razlomak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ iznova daje neodređeni oblik u točki $x = a$ jednog od dva navedene tipa i $f'(x)$, $g'(x)$ udovoljavaju ranije navedenim zahtjevima za $f(x)$ i $g(x)$, onda se može prijeći na kvocijent drugih derivacija itd.

Da bi našli vrijednosti neodređenog oblika $0 \cdot \infty$ pretvaramo odgovarajući produkt $f_1(x) \cdot f_2(x)$, gdje je $\lim_{x\to a} f_1(x) = 0$ i $\lim_{x\to a} f_2(x) = \infty$, u razlomak oblika

$$\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0}\right) \quad \text{ili} \quad \frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

U slučaju neodređenog oblika $\infty - \infty$ treba odgovarajuću razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvoriti u produkt $f_1(x)\left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)$ i riješiti prvo neodređeni oblik $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$. Ako je kojim slučajem $\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, onda razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvaramo u

$$\frac{1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0}\right).$$

Zadatak 9.7: *Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$

(d) $\lim_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$

(e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$

(f) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

(g) $\lim_{x\to\infty}(x - \ln x)$

(h) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Rješenje. (a) Ovo je očito situacija $\frac{\infty}{\infty}$ pa primjenjujemo L'Hospitalovo pravilo i dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$$

jer $(e^x)' = e^x$, $(x^2)' = 2x$ i konačno $(2x)' = 2$

(c) Ovo je slučaj $\frac{0}{0}$, primjenjujemo L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = L'H = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3}{\cos^2 x - \cos^3 x} =$$
$$= L'H = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \sin x}{-2\cos x \sin x + 3\cos^2 x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x}{-2\cos x + 3\cos^2 x} = \frac{3}{-2+3} = 3$$

□

9.3 Derivacije

Derivacijom $f'(x_0)$ funkcije f u točki x_0 nazivamo limes kvocijenta $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ kada h teži u nulu, odnosno

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

ako taj limes postoji. U tom slučaju kažemo da je funkcija f derivabilna u točki x_0.

Vrijednost derivacije $f'(x_0)$ daje *koeficijent smjera* tangente u točki x_0 na graf funkcije f. Određivanje derivacije nazivamo *deriviranjem funkcije*.

Zadatak 9.8: *Koristeći definiciju derivacije, izračunajte derivaciju sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = x$,

b) $f(x) = x^3$,

c) $f(x) = \sqrt{x}$,

d) $f(x) = \sin x$.

Rješenje. (b) Tražimo derivaciju u točki x_0. Imamo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - (x_0)^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0} (3x_0^2 h + 3x_0 h + h^2) = 3x_0^2$$

Znači, općenito možemo reći da je $(x^3)' = 3x^2$, odnosno derivacija funkcije x^3 je funkcija $3x^2$.

□

Osnovna pravila deriviranja: Neka je c konstanta a f i g funkcije koje imaju derivacije. Onda je

1) $(c)' = 0$,

2) $(x)' = 1$,

3) $(f \pm g)' = f' \pm g'$,

4) $(cf)' = cf'$,

5) $(fg)' = f'g + fg'$,

6) $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $(g \neq 0)$.

Zadatak 9.9: *Izračunajte derivacije sljedećih funkcija koristeći gornja pravila:*

(a) $f(x) = x^5 + x^{\frac{3}{2}} + 2x$ *(e)* $f(x) = 6\sin x + \cos x$

(b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *(f)* $f(x) = x^2 \tan x$

(c) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \ln 2$ *(g)* $f(x) = (x^3 + 5x)e^x$

(d) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *(h)* $f(x) = \ln x \arcsin x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Rješenje. (e) Imamo:

$$(6\sin x + \cos x)' = (6\sin x)' + (\cos x)' = 6(\sin x)' - \sin x = 6\cos x - \sin x$$

(g) Imamo:

$$((x^3 + 5x)e^x)' = (x^3 + 5x)'e^x + (x^3 + 5x)(e^x)' = ((x^3)' + (5x)')e^x + (x^3 + 5x)e^x =$$
$$= (3x^2 + 5)e^x + (x^3 + 5x)(e^x)$$

□

Pravilo deriviranja složenih funkcija: Ako je $h = f \circ g$ složena funkcija, a funkcije f i g imaju derivacije u $g(x)$, tj x, onda je

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ili kraće

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Zadatak 9.10: *Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:*

(a) $f(x) = \sqrt{\frac{5\sin x - \cos x}{x}}$ *(e)* $f(x) = \sqrt{\ln x + x} + \ln\sqrt{x} + x$

(b) $f(x) = \cos(xe^x + x^2)$ *(f)* $f(t) = t^2 \sin e^t$

(c) $f(x) = x^3 10^{x^2+6x}$ *(g)* $f(x) = \left(\frac{ax^n + b}{cx^n - d}\right)^m$

(d) $f(x) = \ln(4\sin x - \arccos 2x)$ *(h)* $f(x) = \arctan\frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Rješenje. (b) Imamo:

$$(\cos(xe^x + x^2))' = -\sin(xe^x + x^2)(xe^x + x^2)' = -\sin(xe^x + x^2)(e^x + xe^x + 2x)$$

(h) Deriviramo:

$$\left(\arctan\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}\left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{1+\frac{(x^3+x)^2}{x^2+1}}\frac{(x^3+x)'\sqrt{x^2+1}-(x^3+x)(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} =$$
$$= \frac{1}{x^2+1+(x^3+x)^2}\left((3x^2+1)\sqrt{x^2+1}-(x^3+x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})\right)$$

□

Zadatak 9.11: *Izračunajte $f'(x)$ ako je*

$$(a) \quad f(x) = |x|, \qquad (b) \quad f(x) = x|x|, \qquad (c) \quad f(x) = \ln|x|.$$

Zadatak 9.12: *Izračunajte $f'(x)$ i $f'(0)$ ako je $f(x) = e^{-5x}\sin 3x$.*

Rješenje. Imamo

$$f'(x) = (e^{-5x}\sin 3x)' = -5e^{-5x}\sin 3x + 3e^{-5x}\cos 3x$$

i specijalno je vrijednost derivacije u točki $x = 0$ jednaka
$f'(0) = -5e^0\sin 0 + 3e^0\cos 0 = 3.$ □

Zadatak 9.13: *Pokažite da je $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$ ako je $f(x) = \ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.*

Zadatak 9.14: *Pokažite da je $((\sin x)^n\cos(nx))' = n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.*

Zadatak 9.15: *Pokažite da funkcija $y = xe^{-x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $xy' = (1-x)y$.*

Rješenje. Tražimo derivaciju zadane funkcije, $y' = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$. Sada lijeva strana jednakost $xy' = (1-x)y$ izgleda:

$$xy' = x(e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x}(1-x)$$

dok desna daje

$$(1-x)y = (1-x)xe^{-x}$$

To je očito isto stoga zaključujemo da vrijedi $xy' = (1-x)y$, odnosno y zadovoljava danu diferencijalnu jednadžbu. □

Poglavlje 10

Linearna aproksimacija funkcije, kvadratna aproksimacija. Taylorov red

Zadatak 10.1: *Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približno:*

1) $\sqrt{3.99}$

2) $\sqrt[3]{8.02}$

3) $\sqrt{64.03} + \sqrt[3]{64.03}$

4) $\log_4 16.02$.

Rješenje. U rješenju koristimo formulu

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + \triangle x \cdot f'(x_0).$$

1) Ovdje je $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\triangle x = -0.01$. Stoga je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pa je $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$, $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, pa imamo

$$\sqrt{3.99} \approx 2 - 0.01 \cdot \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{400}.$$

2) Analogno kao u prethodnom zadatku, uz $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $\triangle x = 0.02$.

3) Definiramo $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$. Računamo $f(64.03)$. Premo gornjoj formuli je

$$f(64.03) \approx f(64) + 0.03 \cdot f'(64.03).$$

Očito je $f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$. Dalje,

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

pa je

$$f'(64) = \frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}.$$

Konačno imamo

$$f(64.03) \approx 12 + 0.03 \cdot \frac{1}{12} = 12 + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{12} = 12 + \frac{1}{400}.$$

4) Ovdje je $f(x) = \log_4 x$, $x_0 = 16$, $\triangle x = 0.02$, pa je $f'(x) = \frac{1}{\ln 4} \cdot \log_4 x$ te konačno

$$\log_4 16.02 \approx \log_4 16 + 0.02 \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot \log_4 16 = 2 + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{25 \ln 4}.$$

□

Zadatak 10.2: *Napišite jednadžbu tangente na graf funkcije f u zadanoj točki $(x_0, f(x_0))$, ako je:*

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$

3) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$

4) $f(x) = \log_4 x$, $x = 16$.

Skicirajte u istom koordinatnom sustavu graf funkcije i graf tangente za 1)*.*

Rješenje. Formula za tangentu na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

S obzirom da za zadanu točku x_0 treba još samo izračunati $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, a te smo račune obavili već u prethodnom zadatku, pa rješavanje ide lako:

1) $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$

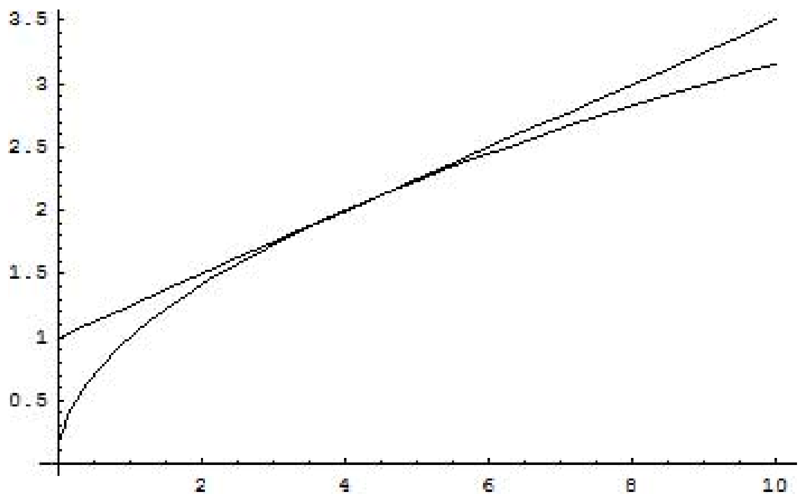
2) $y - 2 = \frac{1}{12}(x - 8) \Rightarrow y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$

3) $y - 12 = \frac{1}{12}(x - 64) \Rightarrow y = \frac{1}{12}x + \frac{20}{3}$

4) $y - 2 = \frac{2}{\ln 4}(x - 16) \Rightarrow y = \frac{2}{\ln 4}x + 2 - \frac{32}{\ln 4}$

□

Zadatak 10.3: *Interpretirajte rješenja zadatka* 1 *u terminima jednadžbi za tangente dobivenima u zadatku* 2*!*



Slika 10.1: Graf funkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

Rješenje. Vrijednosti dobivene za linearnu aproksimaciju u zadanim točkama točno su jednake vrijednostima na tangenti koje odgovaraju tim točkama. Na primjer, u prvom zadatku, podzatak 1), tražili smo približnu vrijednost broja $\sqrt{3.99}$, dobivena vrijednost bila je $4 - \frac{1}{400}$. No, ako u jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u točki $x_0 = 4$ uvrstimo $x = 3.99$, dobivamo

$$y = \frac{1}{4} \cdot 3.99 + 1 = \frac{1}{4}(4 - 0.01) + 1 = 2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100} = 2 - \frac{1}{400},$$

i to je upravo vrijednost dobivena u prvom zadatku.

Zaključujemo da približnu vrijednost funkcije u nekoj točki koja je "blizu" točke u kojoj znamo tangentu na graf funkcije možemo dobiti kao $y-$vrijednost tangente u toj točki.

Provjerite za ostale podzadatke prvog zadatka da dobivate na ovaj način iste vrijednosti koje ste dobili i tamo! □

Formulu za linearnu aproksimaciju stoga možemo shvatiti kao formulu

$$f(x) \approx g_1(x),$$

gdje je

$$g_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Ovdje formulom izričemo istu onu tvrdnju koju smo riječima iskazali na kraju prethodnog zadatka; pritom g_1 označava funkciju čiji je graf točno tangenta na graf funkcije f u točki x_0. Naravno, shvaćamo da gornja približna jednakost vrijedi za točke x koje se nalaze "dovoljno blizu" točki x_0 u kojoj smo računali tangentu na graf funkcije f.

Nije teško vidjeti da će kvadratna aproksimacija vrijednosti funkcije f u točki x blizu točke x_0 biti dana sljedećom formulom:

$$f(x) \approx g_2(x_0),$$

gdje je

$$g_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Može se pokazati da "dovoljno dobre" funkcije u nekoj okolini točke x_0 možemo aproksimirati polinomom proizvoljnog stupnja n (dakle, da ćemo moći izračunati približnu vrijednost funkcije f u svakoj točki x koja je u nekoj okolini točke x_0):

$$f(x) \approx g_n(x),$$

$$\begin{aligned} g_n(x) \quad = \quad & f(x_0) + \\ & f'(x_0)(x - x_0) + \\ & \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ & \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \\ & \cdots + \\ & \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Pritom smo definirali da je

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

Sada vidimo da, ako definiramo da je $0! = 1$ i $f^{(0)} = f$, imamo da je

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Zadatak 10.4: *Korištenjem kvadratne aproksimacije riješite* 1) *i* 2) *u prvom zadatku. Usporedite dobivena rješenja s onima iz prvog zadatka i nacrtajte u istom koordinatnom sustavu funkciju, tangentu i kvadratnu aproksimaciju za prvi podzadatak.*

Rješenje. Koristimo formulu $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$. Pritom smo za konkretne zadatke već izračunali $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, pa preostaje još samo izračunati $f''(x_0)$.

1) Imamo da je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, pa je

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Stoga je

$$f''(4) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{64}} = -\frac{1}{32}$$

i imamo

$$\sqrt{3.99} \approx 2 - \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{100})^2 \cdot (-\frac{1}{32}) = 2 - \frac{1}{400} - \frac{1}{640000}.$$

Vidimo da je ovaj rezultat zapravo sličan rezulatatu u prvom zadatku. To je posljedica činjenice da g_2 ima isti "početak" kao i g_1 (provjerite!), pa će i rezultat kvadratne aproksimacije u nekoj točki izgledati kao rezultat linearne aproksimacije u toj točki, uz dodatak vrijednosti kvadratnog člana $\frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$. Kako je $x - x_0$ jako mala vrijednost (u pravilu po apsolutnoj vrijednosti manja od 1, ovdje -0.01), to će njen kvadrat biti još manji od nje same, što direktno povlači da će doprinos kvadratnog člana biti još manji nego onaj linearnog. Možemo to shvatiti kao činjenicu da kvadratna aproksimacija još "malo popravlja" linearnu aproksimaciju, ovdje za $-\frac{1}{640000} = -0.0000015625$.

Kako glasi funkcija kvadratne aproksimacije? Imamo

$$g_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{32})(x - 4)^2 = \cdots = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

2) Znamo da je $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ($\Rightarrow f''(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{12}$), pa je

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3})x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

i stoga je

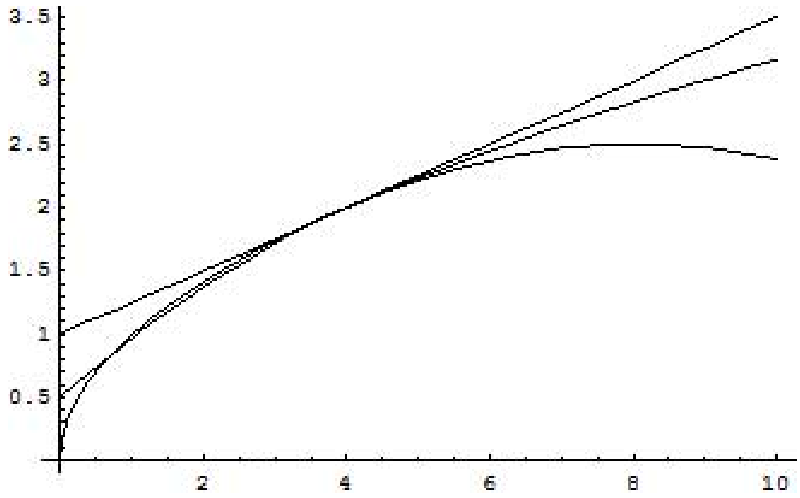
$$f''(8) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}} = -\frac{2}{9 \cdot 32} = -\frac{1}{144}.$$

Sada imamo

$$\sqrt[3]{8.02} \approx 2 + 0.02 \cdot \frac{1}{12} - 0.02^2 \cdot \frac{1}{144} = \cdots = 2 + \frac{1}{600} - \frac{1}{360000}.$$

Za kraj evo sliku koja za prvi podzatak u istom koordinatnom sustavu prikazuje funkciju $f(x) = \sqrt{x}$, te linearnu i kvadratnu aproksimaciju:

$\square$



Slika 10.2: Graf funkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

Ako sada "dozvolimo" da $g_n(x)$ ima beskonačno mnogo članova, dolazimo do $g_\infty(x)$, kojeg obično označavamo s $T(x)$ i zovemo Taylorov red funkcije f u točki x_0:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Pritom vrijedi

$$f(x) = T(x),$$

tj. vrijednost funkcije i vrijednost Taylorovog reda se podudaraju za sve x iz neke okoline (tzv. područja konvergencije reda) točke x_0. To je i logično, jer aproksimacijama polinomima sve većeg i većeg stupnja dobivamo vrijednost sve bližu i bližu stvarnoj vrijednosti funkcije f, pa u limesu, tj. beskonačnosti i postižemo tu stvarnu vrijednost.

Sada ćemo računati Taylorov red za neke elementarne funkcije u zadanoj točki - kažemo da smo zadanu funkciju f "razvili" u Taylorov red u toj točki. Najčešće se funkcija razvija u Taylorov red u okolini nule (kada je to moguće).

Zadatak 10.5: *Izračunajte Taylorov red sljedećih funkcija u zadanoj točki:*

1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

2) $f(x) = a^x$, $x_0 = 0$

3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ *(zašto f ne razvijamo u Taylorov red u okolini nule?)*

4) $f(x) = \log_a x$, $x_0 = 1$

5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

6) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

7) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$

8) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

9) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$

10) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $x_0 = 0$

11) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$

12) $f(x) = 2\cos^2 x$, $x_0 = 0$.

Rješenje. Ako je $x_0 = 0$, onda formula za $T(x)$ poprima nešto jednostavniji izgled:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Vidimo da jedini član kojeg treba računati jest izraz za opću (k-tu) derivaciju funkcije f, a potom je evaluirati u zadanoj točki x_0.

1) Znamo da je prva derivacija funkcije $f(x) = e^x$ opet ona sama, pa je takva i druga, treća i sve ostale derivacije. Stoga je općenito $f^{(k)}(x) = e^x$, pa je $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, pa je

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \dots$$

2) Računamo prvih nekoliko derivacija funkcije $f(x) = a^x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln a \cdot a^x \\ f''(x) &= \ln a \cdot \ln a \cdot a^x = \ln^2 a \cdot a^x \\ f'''(x) &= \ln^3 a \cdot a^x, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je

$$f^{(k)}(x) = \ln^k a \cdot a^x.$$

Stoga je

$$f^{(k)}(0) = \ln^k a \cdot a^0 = \ln^k a,$$

što uvrštavanjem u izraz za Taylorov red funkcije u nuli daje

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k = 1 + \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2} x^2 + \cdots + \frac{\ln^k a}{k!} x^k + \dots$$

Vidimo da je Taylorov red za funkciju $f(x) = e^x$ poseban slučaj Taylorovog reda za funkciju $f(x) = a^x$ koji se dobiva uvrštavanjem $a = e$.

3) Najprije odgovorimo na pitanje zašto ne razvijamo $f(x) = \ln x$ u nuli - razlog je taj što logaritamska funkcija u nuli nije niti definirana, pa nema smisla raditi razvoj te funkcije u red u toj točki.

Sada računamo, kao i gore, nekoliko prvih derivacija zadane funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ f''(x) &= -1 \cdot x^{-2} \\ f'''(x) &= (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}, \end{aligned}$$

pa je općenito

$$f^{(k)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-(k-1)) \cdot x^{-k},$$

gdje produkt $(-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-(k-1))$ možemo shvatiti kao produkt $k-1$ puta -1 s $(k-1)!$. Stoga je

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{k},$$

pa je

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot 1^k = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

Primijetimo da ova formula vrijedi za sve k veće od nule, dok za $k = 0$ imamo $f^{(0)}(x) = f(x) = \ln x$, što daje $f(1) = \ln 1 = 0$. No, to znači da prvi član Taylorovog reda iščezava. Stoga ćemo red pisati kao sumu kod koje indeks sumacije počinje s 1, a ne s 0, kao što je uobičajeno. Uvrštavanjem u izraz za Taylorov red funkcije f u $x_0 = 1$ izraz za opću derivaciju zadane funkcije u točki $x_0 = 1$ imamo

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} (x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(k-1)! \cdot k} (x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k = \\ &= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k!}(x-1)^k + \dots \end{aligned}$$

4) Dobije se sličan red kao pod 3), samo uz dodatni faktor - slično kao što se 2) odnosi prema 1)

5) Računamo prvih nekoliko derivacija:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^4(x) &= \sin x = f(x) \end{aligned}$$

Vidimo dakle da je četvrta derivacija jednaka početnoj funkciji, peta derivacija je jednaka prvoj derivaciji, šesta drugoj, sedma trećoj itd. Općenito, možemo dati ovakvo pravilo:

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \sin x \\ f^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x, \end{aligned}$$

gdje je $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zato je

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(0) &= \sin 0 = 0 \\ f^{(4k+1)}(0) &= \cos 0 = 1 \\ f^{(4k+2)}(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f^{(4k+3)}(0) &= -\cos 0 = -1, \end{aligned}$$

pa vidimo da je za sve parne derivacije vrijednost u nuli jednaka nula, dok za neparne derivacije vrijednost u nuli alterira između 1 i -1. Nije odmah jasno kako treba izgledati Taylorov red, pa ćemo napisati samo prvih nekoliko članova tog reda:

$$T(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots.$$

To znači da se u redu pojavljuju samo neparne potencije od x. Kako sumaciju radimo obično po svim potencijama od x, a ne samo neparnima, uvest ćemo takvu ovisnost potencije od x o indeksu sumacije koja će generirati samo neparne potencije. Očito možemo pisati

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

jer ovaj red generira točno onaj kojeg smo prvih nekoliko članova ispisali (provjerite sami!). Stoga je ovaj red traženi Taylorov red funkcije $f(x) = \sin x$ u nuli.

6) Zadatak se rješava analogno 5), s tim da se sada u Taylorovom redu pojavljuju samo parne potencije od x (provjerite!).

7) Zadatak je sličan zadatku 3), jer je $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, pa će općenito $k-$ta derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ biti jednaka $(k+1)$-oj derivaciji logaritamske funkcije s bazom e (uvjerite se u ovaj argument direktnim računom!):
$$f^{(k)}(x) = (\ln x)^{(k+1)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot x^{k+1},$$
pa je
$$f^{(k)}(1) = (-1)^k \cdot k! \cdot 1^{k+1} = (-1)^k \cdot k!$$
Stoga je
$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k!}{k!}(x-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (x-1)^k = \\ &= 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots+(-1)^k \cdot (x-1)^k + \ldots \end{aligned}$$

8) Kao i prije, računamo prvih nekoliko derivacija zadane funkcije i potom zaključujemo kako glasi izraz za opću derivaciju:
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \\ f'(x) &= (-1)\cdot(1-x)^{-2}\cdot(-1) = (-1)^2\cdot(1-x)^{-2} = (1-x)^{-2} \\ f''(x) &= (-2)\cdot(1-x)^{-3}\cdot(-1) = (-1)^2\cdot 2!\cdot(1-x)^{-3} = 2!\cdot(1-x)^{-3} \\ f'''(x) &= 2!\cdot(-3)\cdot(1-x)^{-4}\cdot(-1) = (-1)^2\cdot 3!\cdot(1-x)^{-4} = 3!\cdot(1-x)^{-4}, \end{aligned}$$
pa vidimo da je općenito
$$f^k(x) = k!\cdot(1-x)^{-(k+1)}$$
i stoga
$$f^k(0) = k!\cdot 1^{-(k+1)} = k!$$
Uvrštavanjem u opću formulu za Taylorov red dobivamo
$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!}x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\ &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k+\ldots \end{aligned}$$

Napomenimo da ovu formulu načelno možemo izvesti iz formule za geometrijski red: označimo

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Pomnožimo ovu jednakost s x oduzmimo tako dobivenu jednakost od gornje. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\
xS &= \phantom{1 +{}} x + x^2 + x^3 + \dots \\
&\Rightarrow \\
S - xS &= 1 \\
(1-x)S &= 1 \\
S &= \frac{1}{1-x},
\end{aligned}$$

pa imamo

$$(*) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

što je jednako

$$f(x) = T(x).$$

Poznavajući činjenicu da geometrijski red konvergira za $-1 < x < 1$ (što znači da jednakost (*) vrijedi samo za brojeve iz tog intervala), imamo i odgovor na pitanje koje je područje konvergencije dobivenog Taylorovog reda: $< -1, 1 >$.

9) Možemo se poslužiti trikom:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)},$$

pa je Taylorov red ove funkcije u biti jednak Taylorovom redu funkcije iz prethodnog podzdatka, s tim da je sada argument tog reda $-x$:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1 \cdot x)^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k = \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k \cdot x^k + \dots
\end{aligned}$$

Stoga je i područje konvergencije isto, jer red konvergira (i u tom području je $f(x) = T(x)$) za $-1 < -x < 1$, što je ekvivalentno $-1 < x < 1$, tj. intervalu $< -1, 1 >$.

Ovaj smo rezultat mogli dobiti i direktno, računajući prvih nekoliko derivacija funkcije f, pronalazeći formulu za opću derivaciju funkcije f, uvrštavajući u tu formulu $x_0 = 0$ i potom taj izraz uvrštavajući u opću formulu za Taylorov red. Provjerite!

10) Slično kao u 9), možemo se referirati na 8), pa će biti

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \\ &= x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k} + \ldots \end{aligned}$$

Koje je ovdje područje konvergencije? Koristite nejednakost za konvergenciju reda 8), tj. nejednakost $-1 < x < 1$, koju sada zapišite kao $|x| < 1$. Uvrštavanjem x^2 umjesto x u tu nejednakost dobivamo novu nejednakost čije rješenje predstavlja interval područja konvergencije.

Ako računamo Taylorov red na uobičajeni način doći ćemo do problema već pri računanju prvih nekoliko derivacija (provjerite!). Zato ćemo morati pribjeći rastavu na parcijalne razlomke, tj. napisat ćemo

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

Sada će Taylorov red zadane funkcije $T(x)$ biti linearna kombinacija Taylorovih redova $T_1(x)$ i $T_2(x)$ funkcija $g_1 = \frac{1}{1-x}$ i $g_2(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^k) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(x^k + (-1)^k \cdot x^k) = \\
&= \frac{1}{2}(1 + 1 + x - x + x^2 - x^2 + x^3 - x^3 + \dots) = \\
&= \frac{1}{2}(2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k,
\end{aligned}$$

pa vidimo da dobivamo isti rezultat kao gore.

11) Slično kao prethodni podzadatak - Taylorov red će biti jednak Taylorovom redu prethodnog podzadatka u kojeg smo umjesto x^2 uvrstili $-x^2$ (zašto?).

12) Koristimo formulu

$$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x).$$

Kako je Taylorov red $T_{\cos}(x)$ kosinusa dan s (provjerite, tj. riješite 6))

$$T_{\cos}(x) = \sum_{k=0}^{k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

to Taylorov red funkcije $g(x) = \cos(2x)$ dobivamo tako da u $T_{\cos}(x)$ uvrstimo argument $2x$, pa je on jednak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Konačno za Taylorov red $T(x)$ zadane funkcije imamo

$$T(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

$\square$

Poglavlje 11

Pad, rast, lokalni ekstremi, konveksnost, konkavnost, točke infleksije i njihovo fizikalno značenje

11.1 Rast i pad funkcije

Za zadanu funkciju f želimo odrediti područje pada, odnosno rasta. Kao što znamo, prva derivacija funkcije u nekoj točki njene domene odgovara koeficijentu smjera tangenta na graf funkcije u toj točki. Zaključujemo da funkcija raste u okolini točke x_0 ako vrijedi $f'(x_0) > 0$, odnosno pada ako vrijedi $f'(x_0) < 0$.

Zadatak 11.1: *Odredite područja pada i rasta funkcije* $f(x) = \frac{1}{3}x33 - 4x$.

Rješenje. Računamo prvu derivciju zadane funkcije: $f'(x) = x^2 - 4$ i rješavamo nejednadžbu

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4$$

pa zaključujemo da funkcija raste na intervalima $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$. Funkcija pada tamo gdje je $f'(x) < 0$, dakle na intervalu $\langle -2, 2\rangle$. $\square$

Zadatak 11.2: *Odredite područja pada i rasta funkcije* $f(x) = e^{x^2} - x^2$.

Zadatak 11.3: *Odredite područja pada i rasta funkcije* $f(x) = \sin(2x)$ *na intervalu* $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$.

Zadatak 11.4: *Odredite područja pada i rasta funkcije* $f(x) = \frac{1}{x-3} + 4$.

11.2 Lokalni ekstremi

Ekstremi funkcije: Neka je zadana funkcija f. Ako postoji okolina točke x_0 takva da za svaku točku $x \neq x_0$ te okoline vrijedi nejednakost $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), onda točku x_0 nazivamo lokalnim minimumom (maksimumom) funkcije f. Točku lokalnog minimuma ili maksimuma funckije nazivamo točkom lokalnog ekstrema. Ako je x_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f, onda je nužno ili $f'(x_0) = 0$ (stacionarna točka) ili $f'(x_0)$ ne postoji (vidi sliku). Obrat ne vrijedi, točke u kojima $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji (kritične točke) nisu uvijek točke ekstrema. Dovoljni uvjeti za lokalne ekstreme funkcije su slijedeći:

1. ako postoji okolina $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ kritične točke x_0 takva da je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ onda je x_0 točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije f. Ako nađemo takav pozitivan broj δ da $f'(x)$ zadržava nepromijenjeni predznak na intervalu $0 < |x - x_0| < \delta$, onda f nema lokalni ekstrem u x_0. Ti uvjeti analogni su sljedećem:

2. ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), onda je x_0 točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije; ako je pak $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$, onda x_0 nije točka ekstrema funkcije.

Zadatak 11.5: *Nađite lokalne ekstreme funkcije* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

Rješenje. Prvo ispitujemo koje točke zadovoljavaju nužan uvjet, tj. za koje točke je $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0.$$

Riješimo gornju kvadratnu jednadžbu i dobivamo kandidate za ekstreme: $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Provjeravamo vrijednost druge derivacije od f u tim točkama.

$$f''(x) = 12x + 6 \quad \text{pa} \quad f''(x_1) = 18,\ f''(x_2) = -18.$$

Zaključujemo da f ima lokalni minimum u $x_1 = 1$ i lokalni maksimum u $x_2 = -2$. □

1. Istražite ekstreme slijedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2(x-12)^2$	(d) $f(x) = x - \ln(1+x)$
(b) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$	(e) $f(x) = x^2 e^{-x}$
(c) $f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x$	(f) $f(x) = x - \arctan x$.

Najveće i najmanje vrijednosti: Najmanja (najveća) vrijednost funkcije f na zadanom intervalu $[a, b]$ dobiva se ili u kritičnim točkama funkcije ili na krajevima intervala.

Zadatak 11.6: *Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ *na intervalu* $[-3, 2]$.

Rješenje. Prvo tražimo kritične točke funkcije f. Kako je $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, kandidati su $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Obje točke nalaze se u zadanom intervalu pa provjeravamo vrijednost funkcije:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(1) = 2 + 3 - 12 - 1 = 8, \\ \text{i} \quad f(x_2) &= f(-2) = -16 + 12 + 24 - 1 = 12. \end{aligned}$$

Ostaje ispitati ponašanje funkcije na rubovima:

$$\begin{aligned} f(-3) &= -54 + 27 + 36 - 1 = 8, \\ \text{i} \quad f(2) &= 16 + 12 - 24 - 1 = 3. \end{aligned}$$

Zaključujemo da najmanja vrijednost na intervalu $[-3, 2]$ funkcijea $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ postiže na rubu $x = 2$ a najveću u točki $x = -2$. □

1. Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije na zadanom intervalu (ako interval nije označen, misli se na cijelu domenu).

   (a) $f(x) = x^3 - 3x$ na intervalu $[-2, 3]$,

   (b) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$,

   (c) $f(x) = \arcsin x$,

   (d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

2. Pokažite da za pozitivne vrijednosti od x vrijedi nejednakost:

   $$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

   Rješenje. Gledamo funkciju $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$ i ispitujemo njezin minimum na intervalu $[0, +\infty)$. Tražimo kritične točke i deriviranjem dobivamo kandidate:

   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

   U zadanom intervalu je samo $x = 1$ i tu je $f(1) = 0$. Na rubovima intervala funkcija teži u $+\infty$ pa zaključujemo da je u $x = 1$ postignuta minimalna vrijednost i ona iznosi nula. Drugim riječima, vrijedi:

   $$x \in [0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

   što je i trebalo dokazati. □

3. Dokažite nejednakosti:
   (a) $e^x > 1 + x \quad$ za $\quad x \neq 0$,
   (b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad$ za $\quad x \neq 0$.
4. U skupu nenegativnih realnih brojeva odredite onaj koji zbrojen sa svojom recipročnom vrijednošću daje maksimalan zbroj. Odredite taj zbroj!
5. Na krivulji $f(x) = \sqrt{-\ln x}$ odredite točku najbližu ishodištu.
6. Od svih stožaca upisanih u kuglu polumjera $R = 1$ odredite onaj maksimalnog volumena.

Zadaci sa rokova:

1. Među svim jednakokračnim trokutima opsega 16 nađite onaj koji ima najveću površinu.
2. Nađite kut među krivuljama: $C_1 \cdots x^2 + 12x + y^2 - 4y + 15 = 0$, $C_2 \cdots x - y^2 + 4y - 3 = 0$.
3. Nađite kut među krivuljama: $C_1 \cdots x = 0$, $C_2 \cdots y = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$.
4. Među svim jednakokračnim trokutima s jednim vrhom u ishodištu i sa druga dva vrha na krivulji $y = \frac{1}{x^2}$, nađite onaj koji ima minimalni opseg.
5. U zadanu sferu upišite valjak maksimalnog obujma.
6. Iz točke $T(0, 2)$ povucite tangente na krivulju $y + \ln x^2 = 0$.
7. Na krivulju $\mathrm{C} \ldots y - x^3 + 3x^2 - 2x = 0$ povucite tangentu koja je okomita na pravac $x + 11y - 12 = 0$.
8. Koji uvjet mora zadovoljavati funkcija $f(x) = x^3 + ax + b$ da bi njen graf dodirivao os x (naći vezu izmedju a i b)?
9. Odredite normalu grafa funkcije $f(x) = e^{2x-2} + e^{x-1} - 2$ u točki u kojoj graf siječe x os.
10. Od tri daske širine 20cm treba napraviti žlijeb maksimalnog poprečnog presjeka. Kolika je površina tog poprečnog presjeka?
11. Medju svim jednakokračnim trokutima opsega 1 mm nadjite onaj koji ima najveću površinu.
12. Na krivulji $C \ldots y - x^2 - \sqrt{5} = 0$ nadjite točku najbližu točki $T(0, 1 + \sqrt{5})$. Slika!

13. Dokažite da za bilo koju vrijednost realnog parametra a postoji tangenta grafa funkcije $f(x) = x^3 - a^2x$ okomita na pravac $x + y = 0$.

14. Iz tjemena parabole $y = 3x^2 - 2x + 1$ povucite tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{2x-5}{3x-1}$. Slika!

11.3 Konveksnost, konkavnost i točke infleksije funkcije

Konveksnost i konkavnost: Za funkciju f kažemo da je konveksna u okoline točke x_0 ako se tangenta na graf funkcije u točki x_0 nalazi ispod grafa funkcije. Ukoliko je iznad, govorimo o konkavnosti. Kriterij za ispitivanje konveksnosti i konkavnosti u točki x_0 vezan je uz vrijednost druge derivacije funkcije f: ukoliko je $f''(x_0) > 0$, funkcija je konveksna, a ako je $f''(x_0) < 0$, funkcija je konkavna.

Zadatak 11.7: *Odredite područja konveksnosti i konkavnosti funkcije* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

Rješenje. Računamo drugu derivaciju zadane funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f''(x) = 2x.$$

Očito je $f''(x) > 0$ za $x > 0$ i $f''(x) < 0$ za $x < 0$ pa je područje konkavnosti $\langle -\infty, 0\rangle$, a konveksnosti $\langle 0, \infty\rangle$. □

Točke infleksije: Točke u kojima funkcija prelazi iz područja konveksnosti u područje konkavnosti ili obratno nazivaju se točkama infleksije. Druga derivacija funkcije u tim točkama je ili jednaka nuli ili nije definirana. Međutim, slično kao kod traženja ekstrema, nije dovoljno provjeriti samo drugu derivaciju jer nam ona daje tek kandidate za točke infleksije. Potrebno je dodatno se uvjeriti da u dobivenim nultočkama druge derivacije funkcija doista prelazi iz područja konveksnosti u područje konkavnosti (ili obratno) i tako što ispitujemo ima li druga derivacija različite predznake slijeva, odnosno zdesna od točke kandidata za točku infleksije.

Zadatak 11.8: *Ispitajte konkavnost i konveksnost te odredite točke infleksije funkcije* $f(x) = e^{-x^2}$.

Rješenje. Računamo drugu derivaciju funkcije:

$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

pa je □

11.4 Ispitivanje toka funkcije i crtanje grafa

Kod crtanja grafa funkcije moramo prvo u nekoliko koraka odrediti sljedeće parametre:

(1) domena funkcije,

(2) nultočke,

(3) asimptote,

(4) kandidate za ekstreme (prva derivacija),

(5) ekstreme i točke infleksije (druga derivacija),

(6) tok (prva derivacija).

Asimptote :

vertikalne asimptote: točke prekida funkcije

horizontalne asimptote: $\lim_{x\to-\infty} f(x) \longrightarrow$ lijeva horizontalna asimptota,
$\lim_{x\to+\infty} f(x) \longrightarrow$ desna horizontalna asimptota

kosa asimptota: $y = kx+l$ gdje je $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$,
$l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Ekstremi i točke infleksije :

$f'(x_0) = 0 \longrightarrow x_0$ je kandidat; $f''(x_0) > 0$ lokalni minimum,
$f''(x_0) < 0$ lokalni maksimum,
$f''(x_0) = 0$ ili $f''(x_0)$ ne postoji će biti točka infleksije ako f'' u intervalima $(x_0 - \delta, x_0)$ i $(x_0, x_0 + \delta)$ za neko δ zadržava konstantne predznake i ako su ti predznaci suprotni.

Tok :

$f'(x) > 0$ funkcija raste,
$f'(x) < 0$ funkcija pada.

Zadatak 11.9: *Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije* $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$.

Rješenje. Jednostavno slijedimo upute:

(1) Domena: $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$ pa je domena $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$.

(2) Nultočke: $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow$
$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 \;\Rightarrow$
$x_1 = -1 \quad (-1, 0),$
$x_2 = 3 \qquad (3, 0).$

(3) Asimptote:
$V.A.\quad x = 0,\; x = 2$
$H.A.\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2} = -1$ pa je horizontalna asimptota $y = 1$.
$K.A.$ nema

(4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = \cdots = \frac{-6x+6}{(2x-x^2)^2}$ pa $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

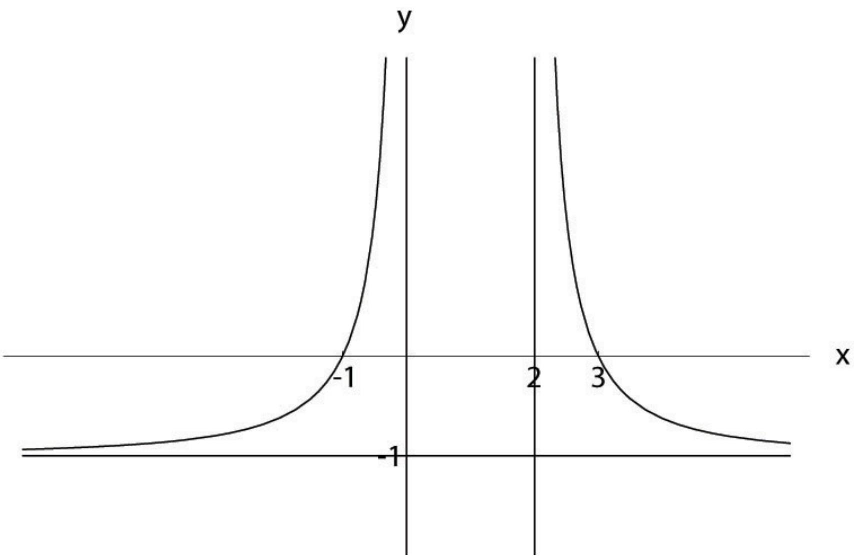
(5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \cdots = \frac{-6-2(-6x+6)(2x-x^2)(2-2x)}{(2x-x^2)^4}$.
Sada imamo

$$f''(1) = -6 < 0 \quad \text{pa je u} \quad x = 1 \quad \text{lokalni maksimum.}$$

(6) Tok:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \;\Rightarrow\; x \in (1, +\infty) \quad \text{pa tu funkcija pada,} \\ f'(x) &> 0 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty, 1) \quad \text{pa tu funkcija raste.} \end{aligned}$$

Na temelju gornjih opažanja sada je lako nacrtati graf:



Slika 11.1: Graf unkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

$\square$

Zadatak 11.10: *Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije* $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

Rješenje. (1) Domena: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

(2) Nultočke: $x = 0$

(3) Asimptote:
$V.A.$ nema
$H.A.$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = 0$ pa je horizontalna asimptota u oba smjera $y = 0$.
$K.A.$ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0$ pa kosih asimptota nema.

(4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}(-2x) = 0$ pa su kandidati $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \cdots = xe^{-x^2}(4x^4 - 14x^2 + 6)$. Sada imamo

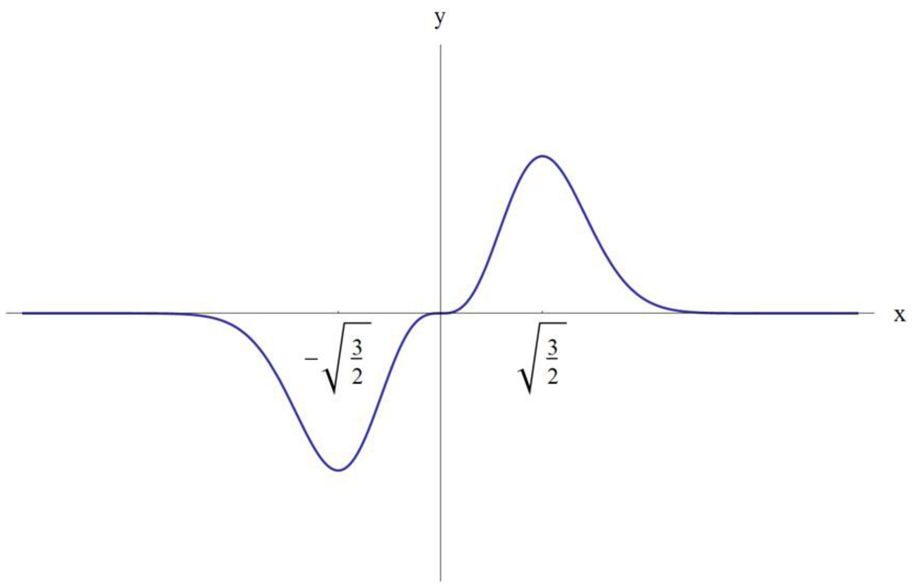
$$\begin{aligned}
f''(0) &= 0 \quad \text{pa je} \quad x = 0 \quad \text{točka infleksije,}\\
f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &< 0 \quad \text{pa je u} \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{lokalni maksimum,}\\
f''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &> 0 \quad \text{pa je u} \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{lokalni minimum.}
\end{aligned}$$

(6) Tok: $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; 3 - 2x^2 < 0 \Rightarrow\; |x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa tu funkcija pada,
a $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; |x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa na tom intervalu funkcija raste.
Crtamo graf:

□

Zadaci sa rokova:

1. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = e^{\sin x}$.
2. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
4. Odredite graf funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.
5. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \left(1 + x^3\right)^{-1}$.
6. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \arctan x - x$.



Slika 11.2: Graf unkcije $f(x) = x^3$ - primjer neparne funkcije

7. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.
8. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) - \ln 2$.
9. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^2 2^{-x}$.
10. Nacrtajte kvalitativni graf funkcije $f(x) = 1 - e^{-\mathrm{cosx}}$.
11. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^3+8x^2+27x+27}{2(x+2)^2}$.
12. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = x - 1 + e^{\frac{1}{1-x}}$.
13. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = \arctan(1 - \frac{1}{x})$.
14. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$.
15. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.
16. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = (x-1)^{-1/2} \cdot \ln(x-1)$.
17. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.
18. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$.
19. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.